Neutrosophic Computing and Machine Learning, Vol. 20, 2022
University of New Mexico

La Neutro-Geometría y la Anti-Geometría como Alternativas y Generalizaciones de las Geometrías no Euclidianas

Neurometrics and Anti-Geometry as Alternatives and Generalizations of Non-Euclidean Geometries

Florentin Smarandache[1]

[1] Universidad de Nuevo México, Departamento de Matemática, Física y Ciencias Naturales, 705 Gurley Ave., Gallup, NM 87301, USA. Email: smarand@unm.edu Orcid: https://orcid.org/0000-0002-5560-5926

Resumen. En este artículo se extiende la Neutro-Álgebra y la Anti-Álgebra a los espacios geométricos, fundando la Neutro/Geometría y Anti-Geometría. Mientras que las Geometrías No-Euclidianas resultaron de la negación total de un axioma específico (Quinto Postulado de Euclides), la Anti-Geometría resulta de la negación total de cualquier axioma o incluso de más axiomas de cualquier sistema axiomático geométrico (Euclidiano, Hilbert, etc.) y de cualquier tipo de geometría como la Geometría (Euclidiana, Proyectiva, Finita, Diferencial, Algebraica, Compleja, Discreta, Computacional, Molecular, Convexa, etc.), y la Neutro-Geometría resulta de la negación parcial de uno o más axiomas [y sin negación total de ningún axioma] de cualquier sistema axiomático geométrico y de cualquier tipo de geometría. Generalmente, en lugar de un Axioma geométrico clásico, se puede tomar cualquier Teorema geométrico clásico de cualquier sistema axiomático y de cualquier tipo de geometría, y transformarlo por Neutrosoficación o Antisoficación en un Neutro-Teorema o Anti-Teorema respectivamente para construir una Neutro-Geometría o Anti-Geometría. Por tanto, la Neutro-Geometría y la Anti-Geometría son respectivamente alternativas y generalizaciones de las Geometrías No Euclidianas. En la segunda parte, se recuerda la evolución desde el Paradoxismo a la Neutrosofía, luego a la Neutro-Álgebra y la Anti-Álgebra, luego a la Neutro-Geometría y la Anti-Geometría, y en general a la Neutro-Estructura y Anti-Estructura que surgen naturalmente en cualquier campo del conocimiento. Al final, se presentan aplicaciones de muchas Neutro-Estructuras en nuestro mundo real.

Palabras clave: Geometrías no euclidianas, Geometría euclidiana, Geometría de Lobachevski-Bolyai-Gauss, Geometría de Riemann, Neutro-Múltiple, Anti-Múltiple, Neutro-Álgebra, Anti-Álgebra, Neutro-Geometría, Anti-Geometría, Neutro-Axioma, Anti-Axioma, Neutro-Teorema, Anti-Teorema, Función parcial, Neutro-Función, Anti-Función, Neutro-Operación, Anti-Operación, Neutro-Atributo, Anti-Atributo, Neutro-Relación, Anti-Relación, Neutro-Estructura, Anti-Estructura.

Abstract. In this paper we extend Neutro-Algebra and Anti-Algebra to geometric spaces, founding Neutro/Geometry and Anti-Geometry. While Non-Euclidean Geometries resulted from the total negation of a specific axiom (Euclid's Fifth Postulate), Anti-Geometry results from the total negation of any axiom or even more axioms of any geometric axiomatic system (Euclidean, Hilbert, etc.) and of any type of geometry such as Geometry (Euclidean, Projective, Finite, Differential, Algebraic, Complex, Discrete, Computational, Molecular, Convex, etc.), and Neutro-Geometry results from the partial negation of one or more axioms [and without total negation of any axiom] of any geometric axiomatic system and of any type of geometry. Generally, instead of a classical geometric Axiom, one can take any classical geometric Theorem of any axiomatic system and of any type of geometry, and transform it by Neutrosophication or Antisofication into a Neutro-Theorem or Anti-Theorem respectively to construct a Neutro-Geometry or Anti-Geometry. Therefore, Neutro-Geometry and Anti-Geometry are respectively alternatives and generalizations of Non-Euclidean Geometries. In the second part, the evolution from Paradoxism to Neutrosophy, then to Neutro-Algebra and Anti-Algebra, then to Neutro-Geometry and Anti-Geometry, and in general to Neutro-Structure and Anti-Structure that arise naturally in any field of knowledge is recalled. At the end, applications of many Neutro-Structures in our real world are presented.

Keywords: Non-Euclidean Geometries, Euclidean Geometry, Lobachevski-Bolyai-Gauss Geometry, Riemannian Geometry, Neutro-Manifold, Anti-Manifold, Neutro-Algebra, Anti-Algebra, Neutro-Geometry, Anti-Geometry, Neutro-Axiom, Anti-Axiom, Neutro-Theorem, Anti-Theorem, Partial Function, Neutro-Function, Anti-Function, Neutro-Operation, Anti-Operation,

Neutro-Attribute, Anti-Attribute, Neutro-Relation, Anti-Relation, Neutro-Structure, Anti-Structure.

1 Introducción

En el mundo real, los espacios no son homogéneos, sino mixtos, complejos, incluso ambiguos. Y los elementos que los pueblan y las reglas que actúan sobre ellos no son perfectos, uniformes o completos, sino fragmentarios y dispares, con información poco clara y conflictiva, y no se aplican en el mismo grado a cada elemento. Los perfectos, idealistas, existen sólo en las ciencias teóricas. Vivimos en un multi-espacio dotado de una multi-estructura [35]. Ni los elementos del espacio ni las normas que los gobiernan son igualitarios, todos ellos se caracterizan por grados de diversidad y variación. Los datos y procedimientos indeterminados (vagos, poco claros, incompletos, desconocidos, contradictorios, etc.) nos rodean.

Es por eso que, por ejemplo, los espacios y estructuras algebraicas y geométricas clásicas se extendieron a espacios y estructuras más realistas [1], llamados respectivamente Neutro-Algebra y Anti-Algebra [2019] y respectivamente Neutro-Geometría y Anti-Geometría [1969, 2021], cuyos elementos no necesariamente se comportan igual, mientras que las operaciones y reglas en estos espacios pueden ser solo parcialmente (no totalmente) verdaderas.

Mientras que las Geometrías No Euclidianas resultan de la negación total de un solo axioma específico (Quinto Postulado de Euclides), la Anti-Geometría resulta de la negación total de cualquier axioma e incluso de más axiomas de cualquier sistema axiomático geométrico (los cinco postulados de Euclides, los 20 axiomas de Hilbert, etc.), y el Neutro-Axioma resulta de la negación parcial de uno o más axiomas [y ninguna negación total de ningún axioma] de cualquier sistema axiomático geométrico.

Por lo tanto, la Neutro-Geometría y la Anti-Geometría son respectivamente alternativas y generalizaciones de las geometrías no euclidianas.

En la segunda parte, recordamos la evolución del Paradoxismo a la Neutrosofía, luego a la Neutro-Álgebra y la Anti-Algebra, luego a Neutro-Geometría y Anti-Geometría, y en general a Neutro-Estructura Anti-Estructura que surgen naturalmente en cualquier campo del saber. Al final, presentamos aplicaciones de muchas Neutro-Estructuras en nuestro mundo real.

En un espacio dado, un axioma clásico es totalmente (100%) cierto. Mientras que un Neutro-Axioma es parcialmente verdadero, parcialmente indeterminado y parcialmente falso. Además, un Anti-Axioma es totalmente (100%) falso.

Una Geometría clásica sólo tiene Axiomas totalmente verdaderos. Mientras que una Neutro-Geometría es una geometría que tiene al menos un Neutro-Axioma y ningún Anti-Axioma. Además, una Anti-Geometría es una geometría que tiene al menos un Anti-Axioma.

A continuación se introduce, en la primera parte de este artículo, la construcción de Neutro-Geometría y Anti-Geometría, junto con las geometrías no euclidianas, mientras que en la segunda parte se aborda la evolución del Paradoxismo a la Neutrosofía, y luego a Neutro-Álgebra y la Anti-Álgebra, culminando con la forma más general de Neutro-Estructura y Anti-Estructura en cualquier campo del conocimiento.

Una declaración clásica (100%) verdadera sobre una estructura clásica dada, puede o no ser 100% verdadera en su correspondiente Neutro- Estructura o Anti- Estructura, depende de los procedimientos de neutrosofización o antisofización [1 - 24].

Más adelante, la tripla neutrosófica (Álgebra, Neutro-Álgebra, Anti-Álgebra) se restringió o extendió a todas las triplas de Teorías de Extensión Difusa (TED) de la forma (Álgebra, Neutro-TED-Algebra, Anti-TED-Algebra), donde TED puede ser: Teoría Difusa, Intuicionista Difusa, Inconsistente Difusa intuicionista (Difusa Ternaria), Pitagórica Difusa (Intuicionista Difusa de segundo tipo de Atanassov), Esférica Difusa, n-Híper-Esférica Difusa, Refinada, Neutrosófica, etc.

1.1 Concepto, Neutro-Concepto, Anti-Concepto

Sobre un espacio geométrico dado, un concepto geométrico clásico (como: axioma, postulado, operador, transformación, función, teorema, propiedad, teoría, etc.), se forma la siguiente tripla neutrosófica geométrica:

Concepto (1, 0, 0), *Neutro-Concepto* (T, I, F), *Anti-Concepto* (0, 0, 1),

donde $(T, I, F) \notin \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$.

{Por supuesto, considerando solo los tripla Neutrosóficos (Concepto, Neutro-Concepto, Anti-Concepto) eso tiene sentido en nuestra vida cotidiana y en el mundo real.}

Concepto (1, 0, 0) significa que el grado de verdad del concepto es T = 1, I = 0, F = 0, o el Concepto es 100 % verdadero, 0 % indeterminado y 0 % falso en el espacio geométrico dado.

Neutro-Concepto (T, I, F) significa que el concepto es T% verdadero, I% indeterminado y 0% falso en el espacio geométrico dado, con (T, I, F) ∈ [0, 1], y (T, I, F) ∉ {(1, 0, 0), (0, 0, 1)}.

Anti-Concepto (0, 0, 1) significa que T = 0, I = 0 y F = 1, o el Concepto es 0% verdadero, 0% indeterminado, y 100% falso en el espacio geométrico dado.

1.2 Geometría, Neutro-Geometría, Anti-Geometría

Se puede pasar de la tripla neutrosófica (Álgebra, Neutro-Álgebra, Anti-Álgebra) a una tripla neutrosófica similar (Geometría, Neutro-Geometría, Anti-Geometría), de la misma forma.

- Correspondientemente a partir de las estructuras algebraicas, con respecto a las geometrías, se tiene:
- En la Geometría clásica (Euclidiana), en un espacio dado, todos los Conceptos geométricos clásicos son 100% verdaderos (es decir, verdaderos para todos los elementos del espacio).
- Mientras que en una Neutro-Geometría, en un espacio dado, hay al menos un Neutro-Concepto (y ningún Anti-concepto).
- En la Anti-Geometría, en un espacio dado, existe al menos un Anti-Concepto.

1.3. Neutrosoficación Geométrica y Antisoficación Geométrica

De igual forma, en cuanto a las estructuras algebraicas, utilizando el proceso de Neutrosoficación de una estructura geométrica clásica, se produce una Neutro-Geometría; mientras que a través del proceso de Antisoficación de una estructura geométrica clásica se produce una Anti-Geometría.

Sea S un espacio geométrico clásico y <A> un concepto geométrico (como: postulado, axioma, teorema, propiedad, función, transformación, operador, teoría, etc.). El <antiA> es lo opuesto a <A>, mientras que <neutA> (también llamado <neutroA>) es la parte neutra (o indeterminada) entre <A> y <antiA>.

La trisección de Neutrosoficación S en tres subespacios:

- ➢ El primer subespacio, denotado simplemente por <A>, donde el concepto geométrico es totalmente cierto [grado de verdad T = 1]; lo denotamos por Concepto (1, 0, 0).
- ➢ El segundo subespacio, denotado por <neutA>, donde el concepto geométrico es parcialmente verdadero [grado de verdad T], parcialmente indeterminado [grado de indeterminación I] y parcialmente falso [grado de falsedad F], denotado como Neutro-Concepto (T, I, F), donde (V, I, F) ∉ {(1, 0, 0), (0, 0, 1)};
- ➢ El tercer subespacio, denotado por <antiA>, donde el concepto geométrico es totalmente falso [grado de falsedad F = 1], indicado por Anti-Concepto (0, 0, 1).

Los tres subespacios pueden o no estar disjuntos, según la aplicación, pero son exhaustivos (su unión es igual a todo el espacio S).

1.4. Geometrías no Euclidianas

1.4.1. La *Geometría de Lobachevsky* (también conocida como *Lobachevsky-Bolyai-Gauss*), y llamada Geometría Hiperbólica, es una Anti-Geometría, porque el Quinto Postulado Euclidiano (en un plano, a través de un punto fuera de una línea, solo se puede dibujar un paralelo a esa línea) se invalida al 100% en el siguiente Anti-Postulado (primera versión): en un plano a través de un punto fuera de una línea, se pueden dibujar infinitas paralelas a esa línea. O sea, (V, I, F) = (0, 0, 1).

1.4.2. La *Geometría de Riemann*, que se llama *Geometría Elíptica*, es también una Anti-Geometría, ya que el Quinto Postulado Euclidiano se invalida al 100% en la siguiente Anti-Postulado (segunda versión): en un lugar, a través de un punto fuera de una línea, no se puede establecer ningún paralelo atraído por esa línea. O sea, (V, I, F) = (0, 0, 1).

1.4.3. Las *Geometrías de Smarandache* (GS) son más complejas [30 – 57]. ¿Por qué este tipo de geometrías mixtas no euclidianas, y en ocasiones parcialmente no euclidianas y parcialmente euclidianas? Porque los espacios geométricos reales no son puros sino híbridos, y las reglas reales no se aplican uniformemente a todos los elementos del espacio, sino que tienen grados de diversidad, aplicándose a algunos conceptos geométricos (punto, línea, plano, superficie, etc.) en un grado menor o mayor.

Del artículo *Pseudo-Manifold Geometries with Applications* [57] del Prof. Dr. Linfan Mao, Universidad de Cornell, Ciudad de Nueva York, EE. UU., 2006, https://arxiv.org/abs/math/0610307:

"Una geometría de Smarandache es una geometría que tiene al menos un axioma negado a la manera de Smarandache (1969), es decir, un axioma se comporta al menos de dos maneras diferentes dentro del mismo espacio, es decir, validado e invalidado, o solo invalidado pero de múltiples maneras distintas y una variedad n de

Smarandache es una variedad n que admite una geometría de Smarandache.

Iseri proporcionó una construcción para la 2-variedad de Smarandache mediante discos triangulares equiláteros en un plano y una forma más general para la 2-variedad de Smarandache en superficies, denominadas geometrías de mapa, presentada por el autor (…).

Sin embargo, pocas observaciones para casos de $n \geq 3$ se encuentran en las revistas. Como un tipo de geometrías de Smarandache, en este trabajo se presenta una forma general de construir n pseudo-variedades dimensionales para cualquier número entero $n \geq 2$. Los haces de fibras principales y de conexión también se definen en estas variedades. Siguiendo estas construcciones, casi todas las geometrías existentes, como las de la geometría de Euclides, la geometría de Lobachevshy-Bolyai, la geometría de Riemann, la geometría de Weyl, la geometría de Kahler y la geometría de Finsler, etc. son sus sub-geometrías".

Iseri ([34], [39 - 40]) ha construido algunas Variedades de Smarandache (S-variedades) que topológicamente son lineales por partes, y cuyas geodésicas tienen un comportamiento elíptico, euclidiano e hiperbólico. Una geometría GS puede exhibir uno o más tipos de curvaturas negativas, cero o positivas en el mismo espacio dado.

1.4.3.1) Si al menos un axioma es validado (parcialmente verdadero, $T > 0$) e invalidado (parcialmente falso, $F > 0$), y ningún otro axioma solo es invalidado (Anti-Axioma), entonces esta primera clase de geometría GS es una Neutro-Geometría.

1.4.3.2) Si al menos un axioma solo se invalida (o $F = 1$), no importa si los otros axiomas son clásicos o también Neutro-Axiomas o Anti-Axiomas, entonces esta segunda clase de geometría GS es una Anti-Geometría.

1.4.3.3) El modelo de una geometría SG que es una Neutro-Geometría:

Bhattacharya [38] construyó el siguiente modelo GS:

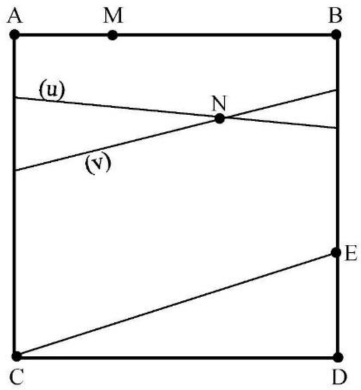

Figura. 1. Modelo de Bhattacharya para la geometría GS como Neutro-Geometría

El espacio geométrico es un cuadrado ABCD, que comprende todos los puntos por dentro y por sus aristas.

"Punto" significa el punto clásico, por ejemplo: A, B, C, D, E, N y M.

"Línea" significa cualquier segmento de línea que conecta dos puntos en los lados cuadrados opuestos AC y BD, por ejemplo: AB, CD, CE, (u) y (v).

Las "líneas paralelas" son líneas que no se cruzan.

Tomemos una línea CE y un punto exterior N a ella. Observamos que hay una infinidad de rectas que pasan por N y paralelas a CE [todas las rectas que pasan por N y entre las rectas (u) y (v) por ejemplo] – el caso hiperbólico.

Además, tomando otro punto exterior, D, no hay una línea paralela que pase por D y sea paralela a CE porque todas las líneas que pasan por D intersecan a CE, el caso elíptico.

Tomando otro punto exterior $M \in AB$, entonces solo tenemos una línea AB paralela a CE, porque solo una línea pasa por el punto M - el caso euclidiano.

En consecuencia, el Quinto Postulado Euclidiano se invalida dos veces, pero también se valida una vez.

Siendo parcialmente hiperbólica no euclidiana, parcialmente elíptica no euclidiana y parcialmente euclidiana, por lo tanto tenemos aquí una GS.

Esta no es una Geometría No-Euclidiana (ya que el Quinto Postulado de Euclides no es totalmente falso, sino sólo parcialmente), pero es una Neutro-Geometría.

Teorema 1.4.3.3.1

Si un enunciado (proposición, teorema, lema, propiedad, algoritmo, etc.) es (totalmente) verdadero (grado de verdad T = 1, grado de indeterminación I = 0 y grado de falsedad F = 0) en la geometría clásica, la declaración puede obtener cualquier valor lógico (es decir, T, I, F pueden ser cualquier valor en [0, 1]) en una Neutro-Geometría o en una Anti-Geometría

Prueba.

El valor lógico que obtiene la declaración en una Neutro- Geometría o en una Anti- Geometría depende de los axiomas clásicos en los que se basa la declaración en la geometría clásica y cómo se comportan estos axiomas en los modelos Neutro-Geometría o Anti-Geometría.

Considerando la siguiente proposición geométrica clásica P (L1, L2, L3) que es 100% cierta:

En un espacio geométrico euclidiano 2D, si dos líneas L1 y L2 son paralelas a la tercera línea L3, entonces también son paralelas (es decir, L1 // L2).

En el Modelo de una geometría GS de Bhattacharya, esta declaración es parcialmente verdadera y parcialmente falsa. Por ejemplo, en la figura 1:

- Grado de verdad: las rectas AB y (u) son paralelas a la recta CE, luego AB es paralela a (u);
- Grado de falsedad: las rectas (u) y (v) son paralelas a la recta CE, pero (u) y (v) no son paralelas ya que se cortan en el punto N.

1.4.3.4) El Modelo de una geometría GS que es una Anti-Geometría

Consideremos el siguiente terreno rectangular PQRS,

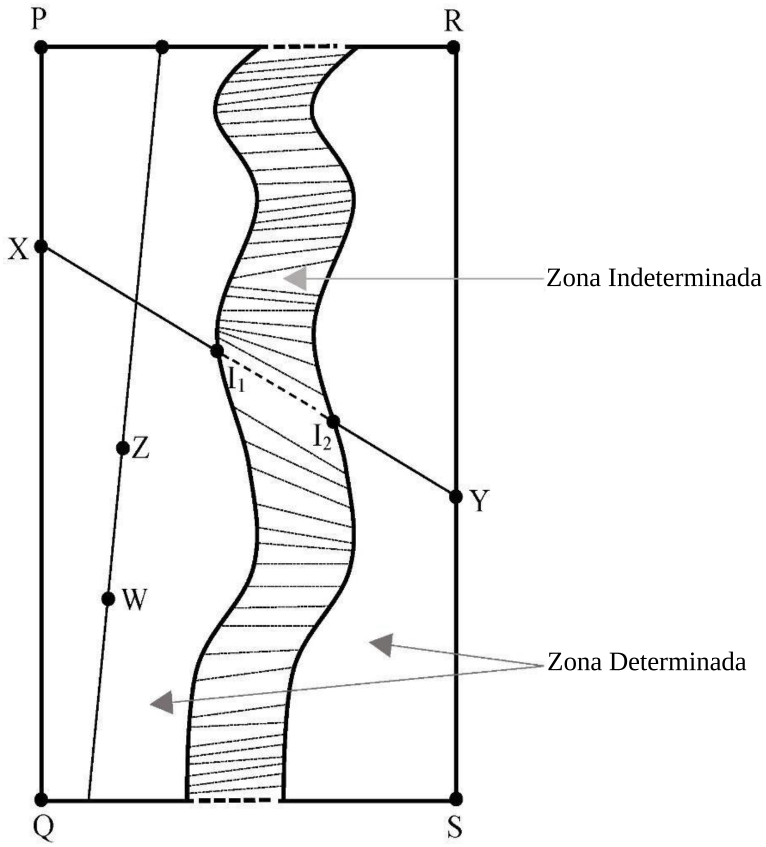

Figura. 2. Modelo para una geometría SG que es una Anti-Geometría

Cuya zona media (sombreada) es una zona indeterminada (un río, con pantano, cañones y sin puente) imposible de cruzar por tierra. Por lo tanto, este pedazo de tierra se compone de una zona determinada y una zona indeterminada (como arriba).

“Punto” significa cualquier punto clásico (usual), por ejemplo: P, Q, R, S, X, Y, Z y W que son puntos conocidos (clásicos) determinados, e I1, I2 que son indeterminados (no conocidos) puntos [en la zona indeterminada].

"Recta" es cualquier segmento de recta que une un punto del lado PQ con un punto del lado RS. Por ejemplo, PR, QS, XY. Sin embargo, estas líneas tienen una parte indeterminada (no conocida, no clara) que es la zona indeterminada. Por otro lado, ZW no es una línea ya que no conecta los lados PQ y RS.

El siguiente axioma geométrico clásico: por dos puntos distintos siempre pasa una sola línea, es totalmente (100%) negado en este modelo de las dos maneras siguientes:

A través de dos puntos distintos, en este modelo dado, no pasa ninguna línea (ver el caso de ZW), o solo pasa una línea parcialmente determinada (ver el caso de XY); por lo tanto, no pasa ninguna línea completamente determinada. Por lo tanto, esta geometría SG es una Anti-Geometría.

1.5. Variedad, Neutro-Variedad, Anti-Variedad

1.5.1. Variedad

La Variedad clásica [29] es un espacio topológico que, en las escalas pequeñas, cerca de cada punto, se parece al Espacio Geométrico clásico (Euclidiano) [es decir, en este espacio sólo hay Axiomas clásicos (totalmente verdaderos)].

O cada punto tiene una vecindad que es homeomorfa a una bola unitaria abierta del Espacio Euclidiano R^n (donde R es el conjunto de los números reales). El homeomorfismo es una función continua y biyectiva cuya inversa también es continua.

"En general, cualquier objeto que sea casi 'plano' en pequeña escala es una variedad" [29].

1.5.2. Neutro-Variedad

La **Neutro-Variedad** es un espacio topológico que, en escalas pequeñas, cerca de cada punto, se parece al Espacio de Neutro-Geometría [es decir, en este espacio hay al menos un Neutro-Axioma (parcialmente verdadero, parcialmente indeterminado y parcialmente falso) y ningún Anti-Axioma].

Por ejemplo, el modelo de Bhattacharya para una geometría GS (Fig. 1) es una Neutro-Variedad, ya que el espacio geométrico ABCD tiene un Neutro-Axioma (es decir, el Quinto Postulado Euclidiano, que es parcialmente verdadero y parcialmente falso) y no tiene Anti-Axioma.

1.5.3. Anti-Variedad

La Anti-Variedad es un espacio topológico que, en las escalas pequeñas, cerca de cada punto, se parece al espacio de la Anti-Geometría [es decir, en este espacio hay al menos un Anti-Axioma (totalmente falso)].

Por ejemplo, el Modelo para una geometría GS (Fig. 2) es una Anti-Variedad, ya que el espacio geométrico PQRS tiene un Anti-Axioma (es decir, por dos puntos distintos siempre pasa una sola línea - lo cual es totalmente falso).

2. Evolución del Paradoxismo a la Neutrosofía luego a Neutro-Álgebra/Anti-Álgebra y ahora a Neutro-Geometría/Anti-Geometría

A continuación se revisan los fundamentos y desarrollos previos que culminaron con la introducción de Neutro-Álgebra y Anti-Álgebra como nuevo campo de investigación, extendido luego a Neutro-Estructura y Anti-Estructura, y ahora particularizado a Neutro-Geometría y Anti-Geometría que son extensiones de las geometrías no euclidianas.

2.1. Del Paradoxismo a la Neutrosofía

El Paradoxismo [58] es un movimiento internacional de ciencia y cultura, fundado por Smarandache en la década de 1980, basado en el uso excesivo de antítesis, oxímoron, contradicciones y paradojas. Durante tres décadas (1980-2020), cientos de autores de decenas de países de todo el mundo contribuyeron con artículos a 15 antologías paradójicas internacionales.

En 1995 extendió la paradoja (basada en opuestos) a una nueva rama de la filosofía llamada Neutrosofía (basada en los opuestos y su neutro) [59], que dio origen a muchas ramas científicas, tales como: lógica neutrosófica, conjunto neutrosófico, probabilidad neutrosófica, estadística neutrosófica, estructuras algebraicas Neutrosóficas, etc. con múltiples aplicaciones en ingeniería, computación ciencia, trabajo administrativo, investigación médica, ciencias sociales, etc.

La Neutrosofía es una extensión de la Dialéctica que se ha derivado de la Filosofía Yin-Yan Chino Antiguo.

2.2. De estructuras algebraicas clásicas a estructuras neutro-algebraicas y estructuras anti-algebraicas

En 2019, Smarandache [1] generalizó las Estructuras Algebraicas clásicas a Estructuras Neutro-Algebraicas (o Neutro-Álgebras) {cuyas operaciones (o leyes) y axiomas (o teoremas) son parcialmente verdaderos, parcialmente indeterminados y parcialmente falsos} como extensiones del Álgebra Parcial, y a Estructuras Anti-Algebraicas (o Anti-Álgebras) {cuyas operaciones (o leyes) y axiomas (o teoremas) son totalmente falsos} y en 2020 siguió desarrollándolas [2, 3, 4].

Generalmente, en lugar de un axioma clásico en un campo de conocimiento, uno puede tomar un teorema clásico en ese campo de conocimiento y transformarlo mediante Neutro-Soficación o Anti-Soficación en un Neutro-Teorema o Anti-Teorema para construir una Neutro-Estructura o Anti-Estructura en ese campo de conocimiento.

Las Neutro-Álgebras y las Anti-Álgebras son un nuevo campo de investigación inspirado en nuestro mundo real. Como se dijo más adelante, también podemos obtener una Neutro-Algebra y Anti-Algebra transformando, en lugar de un Axioma, un Teorema algebraico clásico en un Neutro-Teorema o Anti-Teorema; el proceso se llama Neutro-Soficación o Anti-Soficación respectivamente.

En las estructuras algebraicas clásicas, todas las operaciones están 100% bien definidas y todos los axiomas son 100% ciertos, pero en la vida real, en muchos casos estas restricciones son demasiado duras, ya que en nuestro mundo tenemos cosas que solo verifican parcialmente algunas operaciones o algunas leyes

Al sustituir Concepto con Operación, Axioma, Teorema, Relación, Atributo, Álgebra, Estructura, etc. respectivamente, en lo anterior (Concepto, Neutro-Concepto, Anti-Concepto), obtenemos las siguientes triplas:

2.3. Operación, Neutro-Operación, Anti-Operación

Cuando definimos una operación en un conjunto dado, no significa automáticamente que la operación esté bien definida. Hay tres posibilidades:

1) La operación está bien definida (también llamada internamente definida) para todos los elementos del conjunto [grado de verdad T = 1] (como en las estructuras algebraicas clásicas; esta es una operación clásica). Neutrosóficamente escribimos:Operación (1, 0, 0).
2) La operación si bien definida para algunos elementos [grado de verdad T], indeterminada para otros elementos [grado de indeterminación I], y exteriormente definido para los demás elementos [grado de falsedad F], donde (T, I, F) es diferente de (1, 0, 0) y de (0, 0, 1) (esta es una Neutro-Operación). Neutrosóficamente escribimos: Neutro-Operación (T, I, F).
3) La operación está definida externamente para todos los elementos del conjunto [grado de falsedad F = 1] (esta es una Anti-Operación). Neutrosóficamente escribimos: Anti-Operación (0, 0 ,1).

Una operación * en un conjunto S no vacío dado es en realidad una función de orden n, siendo n un número entero $n \geq 1$, $f : S^n \rightarrow S$.

2.4. Función, Neutro-Función, Anti-Función

Sean U un universo de discurso, A y B dos conjuntos no vacíos incluidos en U, y f una función: $f : A \rightarrow B$

De nuevo, tenemos tres posibilidades:

1) La función está bien definida (también llamada internamente definida) para todos los elementos de su dominio A [grado de verdad T = 1] (esta es una función clásica), es decir, $\forall x \in A, f(x) \in B$. Neutrosóficamente escribimos: Función (1, 0, 0).
2) La función si está bien definida para algunos elementos de su dominio, es decir, $\exists x \in A, f(x) \in B$ [grado de verdad T], indeterminado para otros elementos, es decir, $\exists x \in A, f(x) =$indeterminado [grado de indeterminación I], y definido externamente para los otros elementos, es decir $\exists x \in A, f(x) \notin B$ [grado de falsedad F], donde (T, I, F) es diferente de (1, 0, 0) y de (0, 0, 1). Esta es una Neutro/Función. Neutrosóficamente escribimos: Neutro/Función (T, I, F).
3) La función está definida externamente para todos los elementos de su dominio A [grado de falsedad F = 1] (esta es una Anti/Función), es decir, $\forall x \in A, f(x) \notin B$ (todos los valores de la función están fuera de su codominio B; pueden estar fuera del universo del discurso también). Neutrosóficamente escribimos: Anti-Función (0, 0, 1).

2.5. Neutro-función y Anti-función frente a función parcial

Se prueba que la Neutro-Función y la Anti-Función son extensiones y alternativas de la Función Parcial.

Definición de función parcial [60]

Una función f: A→B a veces se llama una función total, para significar que f(a) está definida para cada a∈A. Si C es cualquier conjunto tal que C⊇A entonces f es también una *función parcial* de C a B.

Claramente, si f es una función de A a B, entonces es una función parcial de A a B, pero una función parcial no necesita definirse para cada elemento de su dominio. El conjunto de elementos de A para los que se define f a veces se denomina dominio de definición.

De otros sitios, la Función Parcial significa: para cualquier a ∈ A se tiene: f(a) ∈ B o f(a) = indefinido.

Comparación

i) "Parcial" se entiende mutuamente cuando existe al menos un elemento a_1∈ A tal que $f(a_1)$ ∈ B, o la Función Parcial está bien definida para al menos un elemento (por lo tanto T > 0).

La Función Parcial no permite el grado bien definido T = 0 (es decir, ningún elemento está bien definido), mientras que la Neutro-Función y la Anti-Función sí lo permiten.

Ejemplo 1.

Consideremos el conjunto de los enteros positivos Z = {1, 2, 3,…}, incluidos en el universo del discurso R, que es el conjunto de los números reales. Definamos la función

$$f_1: Z \to Z, f_1(x) = \frac{x}{0}, para\ todo\ x \in Z$$

Claramente, la función f_1 es 100% indefinida, por lo tanto la indeterminación I = 1, mientras que T =0 y F = 0. Por tanto, f_1 es una Neutro-Función, pero no una Función Parcial.

Ejemplo 2.

Tomemos el conjunto de enteros positivos impares D = {1, 3, 5, …}, incluidos en el universo de discurso R. Definamos la función

$$f_2: D \to D, f_2(x) = \frac{x}{2}, para\ todo\ x \in D$$

La función f_2 está 100% definida externamente, ya que $\frac{x}{2} \notin D$ para todos x∈D. De donde F = 1, T = 0 y I = 0. Por lo tanto, esta es una Anti-Función, pero no una Función parcial.

ii) **La función parcial no detecta todos los tipos de indeterminaciones** que se permiten en una función neutral. Pueden ocurrir indeterminaciones con respecto a: el dominio de la función, el codominio o la relación que conecta los elementos del dominio con los elementos del codominio.

Ejemplo 3.

Consideremos la función g: {1, 2, 3,…, 9, 10, 11} → {12, 13, ⋯, 19}, de quien sólo tienen información vaga y poco clara como se muestra a continuación:

g(1 o 2) = 12, es decir, no estamos seguros si g(1) = 12 o g(2) = 12;

g(3) = 18 o 19, es decir, no estamos seguros si g(3) = 18 o g(3) = 19;

g(4 o 5 o 6) = 13 o 17;

g(7) = desconocido;

g(desconocido) = 14.

Todos los valores anteriores representan el grado de indeterminación de la función (I > 0).

g(10) = 20 que no pertenece al codominio; (definido externamente, o grado de falsedad F > 0);

g(11) = 15 que pertenece al codominio; (definido internamente, o grado de verdad, por lo tanto, T > 0). La Función g es una Neutro-Función (con I > 0, T > 0, F > 0), pero no una Función Parcial ya que este tipo de indeterminaciones no le son propias.

iii) La fracción parcial no captura los valores definidos externamente.

Ejemplo 4.

Sea S = {0, 1, 2, 3} un subconjunto incluido en el conjunto de números racionales Q que sirve como universo de discurso. La función h: S→S, h(x)=$\frac{x}{2}$ es una Neutro/Función, ya que h(0) = 2/0 = indefinido, y h(3) = 2/3 ∉ S (definido exteriormente, 2/3 ∈ Q−S), pero no es una función parcial.

2.6. Axioma, Neutro-Axioma, Anti-Axioma

De manera similar para un axioma, definido en un conjunto dado, dotado de alguna(s) operación(es). Cuando definimos un axioma en un conjunto dado, no significa automáticamente que el axioma sea verdadero para todos los elementos del conjunto. Nuevamente tenemos tres posibilidades:

1) El axioma es verdadero para todos los elementos del conjunto (totalmente verdadero) [grado de verdad T = 1] (como en las estructuras algebraicas clásicas; este es un axioma clásico). Neutrosóficamente escribimos: Axioma (1, 0, 0).
2) El axioma si es verdadero para algunos elementos [grado de verdad T], indeterminado para otros elementos [grado de indeterminación I] y falso para otros elementos [grado de falsedad F], donde (T, I, F) es diferente de (1, 0, 0) y de (0, 0, 1) (esto es Neutro-Axioma). Neutrosóficamente escribimos Neutro-Axioma (T, I, F).
3) El axioma es falso para todos los elementos del conjunto [grado de falsedad F = 1] (esto es Anti-Axioma). Neutrosóficamente escribimos Anti-Axioma (0, 0, 1).

2.7. Teorema, Neutro-Teorema, Anti-Teorema

En cualquier ciencia, un Teorema clásico, definido en un espacio dado, es un enunciado que es 100% verdadero (es decir, verdadero para todos los elementos del espacio). Para probar que un teorema clásico es falso, es suficiente obtener un solo contraejemplo donde el enunciado es falso. Por lo tanto, las ciencias clásicas no dejan lugar a verdad parcial de un teorema (o un enunciado). Pero, en nuestro mundo y en nuestra vida cotidiana, tenemos muchos más ejemplos de declaraciones que son solo parcialmente verdaderas, que declaraciones que son totalmente verdaderas. El Neutro-Teorema y el Anti-Teorema son generalizaciones y alternativas del Teorema clásico en cualquier ciencia.

Consideremos un teorema, establecido en un conjunto dado, dotado de alguna(s) operación(es). Cuando construimos el teorema en un conjunto dado, no significa automáticamente que el teorema es verdadero para todos los elementos del conjunto. Nuevamente tenemos tres posibilidades:

1) El teorema es cierto para todos los elementos del conjunto [totalmente cierto] (como en las estructuras algebraicas clásicas; este es un teorema clásico). Neutrosóficamente escribimos: Teorema (1, 0, 0).
2) El teorema si es verdadero para algunos elementos [grado de verdad T], indeterminado para otros elementos [grado de indeterminación I], y falso para los demás elementos [grado de falsedad F], donde (T, I, F) es diferente de (1, 0, 0) y de (0, 0, 1) (este es un Neutro-Teorema). Neutrosóficamente escribimos: Neutro-Teorema (T, I, F).
3) El teorema es falso para todos los elementos del conjunto (esto es un Anti-Teorema). Neutrosóficamente escribimos: Anti-Teorema (0, 0, 1).

Y lo mismo para (Lema, Neutro-Lema, Anti-Lema), (Consecuencia, Neutro-Consecuencia, Anti-Consecuencia), (Algoritmo, Neutro-Algoritmo, Anti-Algoritmo), (Propiedad, Neutro-Propiedad, Anti-Propiedad), etc.

2.8. Relación, Neutro-Relación, Anti-Relación

1) Una Relación clásica es una relación que es verdadera para todos los elementos del conjunto (grado de verdad T = 1). Neutrosóficamente escribimos Relación (1, 0, 0).
2) Una Neutro-Relación es una relación que es verdadera para algunos de los elementos (grado de verdad T), indeterminada para otros elementos (grado de indeterminación I) y falsa para los otros elementos (grado de falsedad F). Neutrosóficamente escribimos Relación (T, I, F), donde (T, I, F) es diferente de (1, 0, 0) y (0, 0, 1).
3) Una Anti-Relación es una relación que es falsa para todos los elementos (grado de falsedad F = 1). Neutrosóficamente escribimos Relación (0, 0, 1).

2.9. Atributo, Neutro-Atributo, Anti-Atributo

1) Un Atributo clásico es un atributo que es verdadero para todos los elementos del conjunto (grado de verdad T = 1). Neutrosóficamente escribimos Atributo (1, 0, 0).
2) Un Neutro-Atributo es un atributo que es verdadero para algunos de los elementos (grado de verdad T), indeterminado para otros elementos (grado de indeterminación I) y falso para los otros elementos (grado de falsedad F). Neutrosóficamente escribimos Atributo (T, I, F), donde (T, I, F) es diferente de (1, 0, 0) y (0, 0, 1).

3) Un Anti-Atributo es un atributo que es falso para todos los elementos (grado de falsedad F = 1). Neutrosóficamente escribimos Atributo (0, 0, 1).

2.10. Álgebra, Neutro-Álgebra, Anti-Álgebra

1) Una estructura algebraica en la que todas las operaciones están bien definidas y todos los axiomas son totalmente ciertos se llama estructura algebraica clásica (o álgebra).
2) Una estructura algebraica que tiene al menos una Neutro-Operación o un Neutro-Axioma (y ningún Anti-Operación y no Anti-Axioma) se llama Estructura Neutro-Algebraica (o Neutro-Algebra).
3) Una estructura algebraica que tiene al menos una Anti-Operación o un Anti-Axioma se llama Estructura Anti-Algebraica (o Anti-Álgebra).

Por lo tanto, se forma una tripla neutrosófica: <Algebra, Neutro-Algebra, Anti-Algebra>,
Donde “Álgebra” puede ser cualquier estructura algebraica clásica, como: un grupoide, semigrupo, monoide, grupo, grupo conmutativo, anillo, campo, espacio vectorial, BCK-Algebra, BCI-Algebra, etc.

2.11. Álgebra, Neutro$_{TED}$-Algebra, Anti$_{TED}$-Algebra

La tripla neutrosófica (Álgebra, Neutro-Álgebra, Anti-Álgebra) fue más adelante restringida o extendida a todas las teorías difusas y de extensión difusa (TED), formando triplas de la forma: (Álgebra, Neutro$_{TED}$-Algebra, Anti$_{TED}$-Algebra), donde TED puede ser: Teoría Difusa, Intuicionista Difusa, Inconsistente Difusa intuicionista (Difusa Ternaria), Pitagórica Difusa (Intuicionista Difusa de segundo tipo de Atanassov), Esférica Difusa, n-Híper-Esférica Difusa, Refinada, Neutrosófica, etc. A continuación se muestran varios ejemplos.

2.11.1. La tripla intuicionista difusa (Álgebra, Neutro$_{ID}$-Algebra, Anti$_{ID}$-Algebra)

En este caso, "ID" significa "Intuicionista Difusa".

Cuando falta la Indeterminación (I), solo quedan dos componentes, T y F.

1) El Álgebra es la misma que en el entorno neutrosófico, es decir, un Álgebra clásica donde todas las operaciones están totalmente bien definidas y todos los axiomas son totalmente ciertos (T = 1, F = 0).
2) La Neutro$_{ID}$-Algebra significa que al menos una operación o un axioma es parcialmente cierto (grado de verdad T) y parcialmente falso (grado de falsedad parcial F), con $T, F \in [0,1], 0 \leq T + F \leq 1, con\ (T,F) \neq (1,0)$ que representa el axioma clásico, y$(T,F) \neq (1,0)$ que representa el Anti$_{ID}$-Axioma, y sin Anti$_{ID}$-Operación (operación totalmente definida externamente) y sin Anti$_{ID}$-Axioma.
3) La Anti$_{ID}$-Algebra significa que al menos una operación o un axioma es totalmente falso (T = 0, F = 1), sin importar cómo sean las otras operaciones o axiomas.

Por lo tanto, se tienen igualmente las triplas: (Operación, Neutro$_{ID}$-Operación, Anti$_{ID}$-Operación) y (Axioma, Neutro$_{ID}$-Axioma, Anti$_{ID}$-Axioma).

2.11.2. La tripla Difusa (Álgebra, Neutro$_{Difusa}$-Algebra, Anti$_{Difusa}$-Algebra)

Cuando faltan la Indeterminación (I) y la Falsedad (F), sólo queda un componente, T.

1) El Álgebra es la misma que en el entorno neutrosófico, es decir, un Álgebra clásica donde todas las operaciones están totalmente bien definidas y todos los axiomas son totalmente ciertos (T = 1).
2) La Neutro$_{Difusa}$-Algebra significa que al menos una operación o un axioma es parcialmente cierto (grado de verdad T), con T ∈ (0,1), y sin Anti$_{Difusa}$-Operación (operación totalmente definida externamente) y sin Anti$_{Difuso}$-Axioma.
3) La Anti$_{Difusa}$-Algebra significa que al menos una operación o un axioma es totalmente falso (F = 1), sin importar cómo sean las otras operaciones o axiomas.

Por lo tanto, se tienen igualmente las triplas: (Operación, Neutro$_{Difusa}$-Operación, Anti$_{Difusa}$-Operación) y (Axioma, Neutro$_{Difuso}$-Axioma, Anti$_{Difuso}$-Axioma).

2.12. Estructura, Neutro-Estructura, Anti-Estructura en cualquier campo del conocimiento

En general, por Neutro-Soficación, Smarandache extendió cualquier Estructura clásica, en cualquier campo de conocimiento, a una Neutro-Estructura, y por Anti-Soficación a una Anti-Estructura.

i) Una Estructura clásica, en cualquier campo del conocimiento, se compone de: un espacio no vacío, poblado por algunos elementos, y ambos (el espacio y todos los elementos) se caracterizan por unas relación es entre sí (tales como: operaciones, leyes, axiomas, propiedades, funciones, teoremas, lemas, consecuencias, algoritmos, tablas, jerarquías, ecuaciones, desigualdades, etc.), y por sus atributos (tamaño, peso, color, forma, ubicación, etc.).

Por supuesto, a la hora de analizar una estructura, cuenta con respecto a qué relaciones y qué atributos lo hacemos.

ii) Una Neutro-Estructura es una estructura que tiene al menos una Neutro-Relación o un Neutro-Atributo, y ninguna Anti-Relación ni Anti-Atributo.
iii) Una Anti-Estructura es una estructura que tiene al menos una Anti-Relación o un Anti-Atributo.

2.13. Casi todas las Estructuras reales son Neutro-Estructuras

Las Estructuras Clásicas en la ciencia existen principalmente en espacios teóricos, abstractos, perfectos, homogéneos e idealistas, porque en nuestra vida cotidiana casi todas las estructuras son Neutro-Estructuras, ya que no son perfectas ni se aplican a toda la población, y no todos los elementos del espacio tienen las mismas relaciones y los mismos atributos en el mismo grado (no todos los elementos se comportan de la misma manera).

La indeterminación y la parcialidad, respecto del espacio, de sus elementos, de sus relaciones o de sus atributos, no se toman en consideración en las Estructuras Clásicas. Pero nuestro Mundo Real está lleno de estructuras con datos y parcialidades indeterminadas (vagas, poco claras, conflictivas, desconocidas, etc.).

Hay excepciones a casi todas las leyes, y las leyes son percibidas en diferentes grados por diferentes personas.

2.14 Aplicaciones de Neutro-Estructuras en nuestro mundo real

(i) En la sociedad cristiana la ley del matrimonio se define como la unión entre un varón y una mujer (grado de verdad).

Pero, en las últimas décadas, esta ley se ha vuelto menos del 100% cierta, ya que las personas del mismo sexo también podían casarse (grado de falsedad).

Por otro lado, están las personas transgénero (cuyo sexo es indeterminado), y las personas que han cambiado de sexo por procedimientos quirúrgicos, y estas personas (y su matrimonio) no pueden incluirse en las dos primeras categorías (grado de indeterminación).

Por tanto, como tenemos una Neutro-Ley (con respecto a la Ley del Matrimonio) tenemos una Neutro-Estructura Cristiana.

(ii) En India, la ley del matrimonio no es la misma para todos los ciudadanos: los hombres hindúes religiosos pueden casarse con una sola esposa, mientras que los musulmanes pueden casarse con hasta cuatro esposas.
(iii) No siempre la diferencia entre bueno y malo puede ser clara, desde un punto de vista una cosa puede ser buena, mientras que desde otro punto de vista puede ser mala. Hay cosas que son parcialmente buenas, parcialmente neutras y parcialmente malas.
(iv) Las leyes no se aplican por igual a todos los ciudadanos, por lo que son Neutro-Leyes. Algunas leyes se aplican en cierto grado a una categoría de ciudadanos y en diferente grado a otra categoría. Como tal, hay un chiste folclórico estadounidense: ¡Todas las personas nacen iguales, pero algunas personas son más iguales que otras!

- Hay gente poderosa que está por encima de las leyes, y otra gente que se beneficia de la inmunidad respecto de las leyes.
- Por ejemplo, en los tribunales de justicia, las personas privilegiadas se benefician de mejores abogados defensores que las clases bajas, por lo que pueden obtener una sentencia más leve.
- No todos los delincuentes van a la cárcel, sino solo los que son atrapados y se demuestra su culpabilidad en los tribunales de justicia. Ni los criminales que por razón de la locura no pueden ser juzgados y no van a la cárcel ya que no pueden hacer una diferencia entre el bien y el mal.
- Desafortunadamente, incluso personas inocentes fueron y pueden ir a la cárcel debido a veces a errores de jurisdicción...

- La hipocresía y el doble rasero están muy extendidos: ¡alguna regulación se aplica a algunas personas, pero a otras no!

(v) La Ley Antiaborto no se aplica a todas las mujeres embarazadas: el incesto, las violaciones y las mujeres cuya vida corre peligro pueden abortar.

(vi) La Ley de Control de Armas no se aplica a todos los ciudadanos: la policía, el ejército, la seguridad y los cazadores profesionales pueden portar armas. Etc.

Conclusión

En este trabajo se ha extendido las Geometrías No Euclidianas a la Anti-Geometría (un espacio geométrico que tiene al menos un Anti-Axioma) y a la Neutro-Geometría (un espacio geométrico que tiene al menos un Neutro-Axioma y ningún Anti-Axioma) tanto en cualquier sistema axiomático como en cualquier tipo de geometría), de manera similar a Neutro-Algebra y Anti-Algebra. Generalmente, en lugar de un Axioma geométrico, se puede tomar cualquier Teorema geométrico clásico en cualquier sistema axiomático y en cualquier tipo de geometría y transformarlo por Neutro-Soficación o Anti-Soficación en un Neutro-Teorema o Anti-Teorema para construir una Neutro-Geometría o Anti-Geometría respectivamente.

Florentin Smarandache, Neutro-Geometría y Anti-Geometría son alternativas y generalizaciones de las Geometrías No Euclidianas

Un Neutro-Axioma es un axioma que es parcialmente verdadero, parcialmente indeterminado y parcialmente falso en el mismo espacio. Mientras que el Anti-Axioma es un axioma que es totalmente falso en el espacio dado.

Mientras que las Geometrías No Euclidianas resultaron de la negación total de un axioma específico (Quinto Postulado de Euclides), la Anti-Geometría (1969) resultó de la negación total de cualquier axioma e incluso de más axiomas de cualquier sistema axiomático geométrico (Euclidiano, Hilbert, etc.) y de cualquier tipo de geometría como la Geometría (Euclidiana, Proyectiva, Finita, Afín, Diferencial, Algebraica, Compleja, Discreta, Computacional, Molecular, Convexa, etc.), y la Neutro-Geometría resultante de la negación parcial de uno o más axiomas [y ninguna negación total de ningún axioma] de cualquier sistema axiomático geométrico y de cualquier tipo de geometría.

Por tanto, la Neutro-Geometría y la Anti-Geometría son respectivamente alternativas y generalizaciones de las Geometrías No Euclidianas.

En la segunda parte, se analiza la evolución desde el Paradoxismo a la Neutrosofía, luego a la Neutro-Álgebra y Anti-Álgebra, luego a la Neutro-Geometría y Anti-Geometría, y en general a la Neutro-Estructura y Anti-Estructura que surgen naturalmente en cualquier campo del conocimiento.

Al final, presentamos aplicaciones de muchas Neutro-Estructuras en nuestro mundo real.

Más adelante se ha revisado la evolución desde el Paradoxismo a la Neutrosofía, y desde las estructuras algebraicas clásicas a las estructuras Neutro-Álgebra y Anti-Álgebra, y en general a la Neutro-Estructura y Anti-Estructura en cualquier campo del conocimiento. Luego se presentaron muchas aplicaciones de Neutro-Estructuras de la vida cotidiana.

Referencias

[1] F. Smarandache, Introduction to NeutroAlgebraic Structures and AntiAlgebraic Structures [http://fs.unm.edu/NA/NeutroAlgebraicStructures-chapter.pdf], in his book *Advances of Standard and Nonstandard Neutrosophic Theories*, Pons Publishing House Brussels, Belgium, *Chapter 6, pages 240-265,* 2019; http://fs.unm.edu/AdvancesOfStandardAndNonstandard.pdf

[2] Florentin Smarandache: NeutroAlgebra is a Generalization of Partial Algebra. International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Volume 2, 2020, pp. 8-17. DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.3989285 http://fs.unm.edu/NeutroAlgebra.pdf

[3] Florentin Smarandache: Introduction to NeutroAlgebraic Structures and AntiAlgebraic Structures (revisited). Neutrosophic Sets and Systems, vol. 31, pp. 1-16, 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3638232 http://fs.unm.edu/NSS/NeutroAlgebraic-AntiAlgebraic-Structures.pdf

[4] Florentin Smarandache, Generalizations and Alternatives of Classical Algebraic Structures to NeutroAlgebraic Structures and AntiAlgebraic Structures, Journal of Fuzzy Extension and Applications (JFEA), J. Fuzzy. Ext. Appl.
Vol. 1, No. 2 (2020) 85–87, DOI: 10.22105/jfea.2020.248816.1008 http://fs.unm.edu/NeutroAlgebra-general.pdf

[5] A.A.A. Agboola, M.A. Ibrahim, E.O. Adeleke: Elementary Examination of NeutroAlgebras and AntiAlgebras viza-viz the Classical Number Systems. International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Volume 4, 2020, pp. 16-19. DOI:http://doi.org/10.5281/zenodo.3989530 http://fs.unm.edu/ElementaryExaminationOfNeutroAlgebra.pdf

[6] A.A.A. Agboola: Introduction to NeutroGroups. International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Volume 6,

2020, pp. 41-47. DOI:http://doi.org/10.5281/zenodo.3989823 http://fs.unm.edu/IntroductionToNeutroGroups.pdf
[7] A.A.A. Agboola: Introduction to NeutroRings. International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Volume 7, 2020, pp. 62-73. DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.3991389 http://fs.unm.edu/IntroductionToNeutroRings.pdf
[8] Akbar Rezaei, Florentin Smarandache: On Neutro-BE-algebras and Anti-BE-algebras. International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Volume 4, 2020, pp. 8-15. DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.3989550 http://fs.unm.edu/OnNeutroBEalgebras.pdf
[9] Mohammad Hamidi, Florentin Smarandache: Neutro-BCK-Algebra. International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Volume 8, 2020, pp. 110-117. DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.3991437 http://fs.unm.edu/Neutro-BCK-Algebra.pdf
[10] Florentin Smarandache, Akbar Rezaei, Hee Sik Kim: A New Trend to Extensions of CI-algebras. International Journal of Neutrosophic Science (IJNS) Vol. 5, No. 1 , pp. 8-15, 2020; DOI: 10.5281/zenodo.3788124 http://fs.unm.edu/Neutro-CI-Algebras.pdf
[11] Florentin Smarandache: Extension of HyperGraph to n-SuperHyperGraph and to Plithogenic nSuperHyperGraph, and Extension of HyperAlgebra to n-ary (Classical-/Neutro-/Anti-) HyperAlgebra. Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 33, pp. 290-296, 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3783103 http://fs.unm.edu/NSS/n-SuperHyperGraph-n-HyperAlgebra.pdf
[12] A.A.A. Agboola: On Finite NeutroGroups of Type-NG. International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Volume 10, Issue 2, 2020, pp. 84-95. DOI: 10.5281/zenodo.4277243, http://fs.unm.edu/IJNS/OnFiniteNeutroGroupsOfType-NG.pdf
[13] A.A.A. Agboola: On Finite and Infinite NeutroRings of Type-NR. International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Volume 11, Issue 2, 2020, pp. 87-99. DOI: 10.5281/zenodo.4276366, http://fs.unm.edu/IJNS/OnFiniteAndInfiniteNeutroRings.pdf
[14] A.A.A. Agboola, Introduction to AntiGroups, International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Vol. 12, No. 2, PP. 71-80, 2020, http://fs.unm.edu/IJNS/IntroductionAntiGroups.pdf
[15] M.A. Ibrahim and A.A.A. Agboola, Introduction to NeutroHyperGroups, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 38, 2020, pp. 15-32. DOI: 10.5281/zenodo.4300363, http://fs.unm.edu/NSS/IntroductionToNeutroHyperGroups2.pdf
[16] Elahe Mohammadzadeh and Akbar Rezaei, On NeutroNilpotentGroups, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 38, 2020, pp. 33-40. DOI: 10.5281/zenodo.4300370, http://fs.unm.edu/NSS/OnNeutroNilpotentGroups3.pdf
[17] F. Smarandache, Structure, NeutroStructure, and AntiStructure in Science, International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Volume 13, Issue 1, PP: 28-33, 2020; http://fs.unm.edu/IJNS/NeutroStructure.pdf
[18] Diego Silva Jiménez, Juan Alexis Valenzuela Mayorga, Mara Esther Roja Ubilla, and Noel Batista Hernández, NeutroAlgebra for the evaluation of barriers to migrants' access in Primary Health Care in Chile based on PROSPECTOR function, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 39, 2021, pp. 1-9. DOI: 10.5281/zenodo.4444189; http://fs.unm.edu/NSS/NeutroAlgebraForTheEvaluationOfBarriers1.pdf
[19] Madeleine Al-Tahan, F. Smarandache, and Bijan Davvaz, NeutroOrderedAlgebra: Applications to Semigroups, Neutrosophic Sets and Systems, vol. 39, 2021, pp.133-147. DOI: 10.5281/zenodo.4444331, http://fs.unm.edu/NSS/NeutroOrderedAlgebra11.pdf
[20] F. Smarandache, Universal NeutroAlgebra and Universal AntiAlgebra, Chapter 1, pp. 11-15, in the collective book NeutroAlgebra Theory, Vol. 1, edited by F. Smarandache, M. Sahin, D. Bakbak, V. Ulucay, A. Kargin, Educational Publ., Grandview Heights, OH, United States, 2021, http://fs.unm.edu/NA/UniversalNeutroAlgebra-AntiAlgebra.pdf
[21] Madeleine Al-Tahan, NeutroOrderedAlgebra: Theory and Examples, 3rd International Workshop on Advanced Topics in Dynamical Systems, University of Kufa, Iraq, March 1st, 2021, http://fs.unm.edu/NA/NeutroOrderedAlgebra.pdf
[22] F. Smarandache A. Rezaei A.A.A. Agboola Y.B. Jun R.A. Borzooei B. Davvaz A. Broumand Saeid M. Akram M. Hamidi S. Mirvakilii, On NeutroQuadrupleGroups, 51st Annual Mathematics Conference Kashan, February 16-19, 2021, http://fs.unm.edu/NA/OnNeutroQuadrupleGroups-slides.pdf
[23] Madeleine Al-Tahan, Bijan Davvaz, Florentin Smarandache, and Osman Anis, On Some NeutroHyperstructures, Symmetry 2021, 13, 535, pp. 1-12, https://doi.org/10.3390/sym13040535; http://fs.unm.edu/NeutroHyperstructure.pdf
[24] A. Rezaei, F. Smarandache, and S. Mirvakili, Applications of (Neutro/Anti)sophications to Semihypergroups, Journal of Mathematics, Hindawi, vol. 2021, Article ID 6649349, pp. 1-7, 2021; https://doi.org/10.1155/2021/6649349, http://fs.unm.edu/NA/Neutro-Anti-sophications.pdf
[25] F. Smarandache, Neutrosophy. / Neutrosophic Probability, Set, and Logic, ProQuest Information & Learning, Ann Arbor, Michigan, USA, 105 p., 1998, http://fs.unm.edu/eBook-Neutrosophics6.pdf

[26] Serkan Karatas and Cemil Kuru, Neutrosophic Topology, Neutrosophic Sets Syst, Vol. 13, 90-95, 2016, http://fs.unm.edu/NSS/NeutrosophicTopology.pdf
[27] Florentin Smarandache, Neutrosophic Precalculus and Neutrosophic Calculus, EuropaNova, Brussels, Belgium, 154 p., 2015; https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1509/1509.07723.pdf
[28] F. Smarandache, Indeterminacy in Neutrosophic Theories and their Applications, International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Vol. 15, No. 2, PP. 89-97, 2021, http://fs.unm.edu/Indeterminacy.pdf
[29] Rowland, Todd. "Manifold." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. https://mathworld.wolfram.com/Manifold.html
[30] L. Mao, Smarandache Geometries & Map Theories with Applications (I), Academy of Mathematics and Systems, Chinese Academy of Sciences, Beijing, P. R. China, 2006, http://fs.unm.edu/CombinatorialMaps.pdf
[31] Linfan Mao, Automorphism Groups of Maps, Surfaces and Smarandache Geometries (first edition - postdoctoral report to Chinese Academy of Mathematics and System Science, Beijing, China; and second editions - graduate textbooks in mathematics), 2005 and 2011, http://fs.unm.edu/Linfan.pdf, http://fs.unm.edu/Linfan2.pdf
[32] L. Mao, Combinatorial Geometry with Applications to Field Theory (second edition), graduate textbook in mathematics, Chinese Academy of Mathematics and System Science, Beijing, China, 2011, http://fs.unm.edu/CombinatorialGeometry2.pdf
[33] Yuhua Fu, Linfan Mao, and Mihaly Bencze, Scientific Elements - Applications to Mathematics, Physics, and Other
Sciences (international book series): Vol. 1, ProQuest Information & Learning, Ann Arbor, MI, USA, 2007, http://fs.unm.edu/SE1.pdf
[34] Howard Iseri, Smarandache Manifolds, ProQuest Information & Learning, Ann Arbor, MI, USA, 2002, http://fs.unm.edu/Iseri-book.pdf
[35] Linfan Mao, Smarandache Multi-Space Theory (partially post-doctoral research for the Chinese Academy of Sciences), Academy of Mathematics and Systems Chinese Academy of Sciences Beijing, P. R. China, 2006, http://fs.unm.edu/S-Multi-Space.pdf
[36] Yanpei Liu, Introductory Map Theory, ProQuest Information & Learning, Michigan, USA, 2010, http://fs.unm.edu/MapTheory.pdf
[37] L. Kuciuk & M. Antholy, An Introduction to the Smarandache Geometries, JP Journal of Geometry & Topology, 5(1), 77-81, 2005, http://fs.unm.edu/IntrodSmGeom.pdf
[38] S. Bhattacharya, A Model to A Smarandache Geometry, http://fs.unm.edu/ModelToSmarandacheGeometry.pdf
[39] Howard Iseri, A Classification of s-Lines in a Closed s-Manifold, http://fs.unm.edu/Closed-s-lines.pdf
[40] Howard Iseri, Partially Paradoxist Smarandache Geometries, http://fs.unm.edu/Howard-Iseri-paper.pdf
[41] Chimienti, Sandy P., Bencze, Mihaly, "Smarandache Paradoxist Geometry", Bulletin of Pure and Applied Sciences, Delhi, India, Vol. 17E, No. 1, 123-1124, 1998.
[42] David E. Zitarelli, Reviews, Historia Mathematica, PA, USA, Vol. 24, No. 1, p. 114, #24.1.119, 1997.

Recibido: Febrero 22, 2022. **Aceptado:** Marzo 15, 2022