ASPECTOS GEOMÉTRICOS

DA

RELATIVIDADE GERAL

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Stern, Julio Michael
Aspectos geométricos da relatividade geral. São Paulo, 1983.

Tese (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Area de Concentração: Física Matemática.
Orientador: Carlos Edgard Harle

Unitermos: 1. Relatividade Geral. 2. Geometria Diferencial.

USP/IF-B11/83

"Ele ama a forma - continuava Santish - por isso, Ele desce a forma incessantemente".

Tagore, R Çaturanga, 4-IV

" O espaço, ou lugar intrínseco, não difere em ato do corpo que o ocupa. A diferença está apenas na forma usual de pensar...."

Descartes, Princípios de Filosofia , X

"Lentamente as pessoas se habituarão a idéia de que a realidade física final é o próprio estado físico do espaço"

Einstein, A.

AGRADECIMENTOS*

Gostaria de manifestar minha gratidão por todos aqueles que contribuiram, no correr destes dois últimos anos, na elaboração desta dissertação, e na minha formação de maneira geral. Certamente não conseguirei fazê-lo e injustamente terei deixado de mencionar muitas pessoas que me são caras.

Sou grato inicialmente ao meu orientador, Prof. Carlos Edgard Harle, pelo estímulo, paciência e apoio que me concedeu para a realização desta dissertação.

Externo também minha gratidão a:

- Todos os colegas e professores do IME-USP que comigo conviveram nestes anos, como o Schönmann, o Dreifus, o Elicha, e a Helena a quem devo também o auxílio na revisão dos originais.
- Aos colegas e professores do IFUSP, como Orfeu, Paulo, Jordão, Sara, Krenkel, Marcelo, ..., etc... e muitos, especialmente ao Prof. Henrique Fleming.
- A Ivanete pelo paciente e minucioso trabalho de datilografia.
- A Marisa pelos desenhos, e pelo carinho com que foram feitos.
- A minha família, muito especialmente, a minha mãe, pelo estímulo e apoio que deram a meus estudos ao longo de toda a minha vida.
- A memória ou as circunstâncias não me permitem relacionar a todos quanto deveria, ou gostaria, a todos, sou profundamente grato.

---

* Esta dissertação foi elaborada sob o patrocínio da FAPESP Processo nº 80/1386-4.

ABSTRACT

In this dissertation we present some topics on modern differential geometry and related subjects. The material here exposed was selected so as to allow to present, as an example of application, axiomatization and the discussion of a some problems of general relativity.

Whenever possible, we tried to give this dissertation a rigorous synthetic and logically selfcontained from. Among these three points, the third onde was the most meticuluosly accomplished. Very rarely we will use some result in the text, that was not obteined in the same.

We also tried to balance the concision and the rigour of the text in order to avoid it to become hermetic or too extensive. Furthermore, not let it become more abstract than necessary but showing the results obtained in a sufficiently general context.

We hope that our compromise and the way we exposed it may satisfy the reader.

SUMÁRIO

Apresentamos, nesta dissertação, alguns tópicos da moderna geometria diferencial e assuntos correlatos. O material aqui exposto foi selecionado de modo a ser possível apresentar, como exemplo de aplicação, a axiomatização e discussão de alguns problemas de relatividade geral.

Procuramos, sempre que possível, estruturar a dissertação de forma rigorosa, sintética e logicamente autocontida. Destes três itens, foi o terceiro o mais escrupulosamente cumprido. Muito raramente utilizaremos no texto algum resultado que não seja nele obtido.

A conclusão e o rigor do texto foram ponderados de modo a não tornar o texto nem hermético, nem por demais extenso: e de modo a não torná-lo abstrato além do necessário, mas mostrando os resultados obtidos num contexto suficientemente geral.

Esperamos que o compromisso adotado e a forma de exposição sejam de agrado do leitor.

I N D I C E

CAPÍTULO I - ÁLGEBRA LINEAR

INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar, de forma sucinta, o material de álgebra linear utilizado no seguimento da tese. Este capítulo está dividido em quatro secções, a saber:

Álgebra Linear: nesta primeira secção faz-se um resumo da álgebra, propriamente dita, isto é, dar noções de espaço vetorial, dependência linear, base, subespaço, transformação linear e espaço dual.

Funções Multilineares: nesta segunda secção apresenta-se algumas noções de álgebra miltilinear, tais como as de função multilinear, tensor, produto tensorial, contração.

Forma Bilinear: esta terceira secção é dedicada ao estudo das formas bilineares e de noções correlatas, como as de forma quadrática, métrica e ortonormalidade de uma base.

Simetrias: na última secção do capítulo relacionam-se conceitos como os de tensor simétrico, operador de simetrização, tensor antisimétrico, operador de antisimetrização, produto exterior e o operador de Hodge.

O conceito capital deste capítulo é o de espaço vetorial, que retrata de uma maneira natural a estrutura do espaço Euclidiano, E^n, ou de R^n *, ou ainda de noções mais abstratas, como a do espaço tangente num ponto a uma variedade, TpM, que estudaremos no capítulo III.

———— // ————

Definição I - 1

Denomina-se espaço vetorial a um conjunto, V, dotado de duas operações, a primeira denominada soma $+ : V \times V \to V$ e a segunda denominada produto por escalar $. : R \times V \to V$, tais que satisfaçam as seguintes propriedades, para quaisquer $\alpha, \beta, \varepsilon R$; $v, w, y \varepsilon V$:

Associatividade dos produtos, isto é,

$\alpha .(\beta . v) = (\alpha \beta) . v$

Distributividade da soma, isto é,

$(\alpha + \beta) . v = \alpha . v + \beta . v$

Distributividade do produto, isto é,

$\alpha . (v + w) = \alpha . v + \alpha . w$

Identidade do produto pela unidade, isto é,

$1 . v = v$

Associatividade da soma, isto é,

$v + (w + y) = (v + w) + y$

* Veja por exemplo (Boothby,75) e (O'neill, 66).

Existência do elemento neutro, isto é,

$\exists| 0 \in V \mid \forall v \in V, \quad 0 + v = v$

Existência e unicidade do elemento oposto, isto é,

$\exists| v \in V \mid w \in V \mid v + w = 0$

Comutatividade da soma, isto é,

$v + w = w + v$

Observação:

ao elemento oposto de $v \in V$, nota-se $-v$, e a operação $v + (-w)$, nota-se $v - w$.

A título de exemplo, e de assegurar a inambiguidade da notação empregada para o oposto de um elemento de um espaço vetorial, recordemos que:

Proposição I - 1

Dado um espaço vetorial V, e $\alpha \in R$, $v \in V$ temos que:

1) $\alpha \cdot v = 0 \leftrightarrow \alpha = 0$ ou $v = 0$

2) $-v = -1 \cdot v$

O próximo conceito a ser definido é o de dependência linear, que traduz o fato geométrico de estarem ou não K elementos, de um espaço vetorial, num hiperplano de dimensão K - 1.

Definição I - 2

Dado um espaço vetorial V, um subconjunto $\{v_i\} \subset V$, onde $1 \leq i \leq n \in N$ diz-se linearmente dependente (L.D) sse existir um conjunto $\{\alpha^i\}$, $\alpha^i \in R$, tal que :

$$\alpha^i v_i = 0$$

um subconjunto do espaço vetorial que não seja linearmente dependente, diz-se linearmente independente (L.I).

Definição I - 3

Num espaço vetorial V, um subconjunto $\{v_i\} \subset V$, linearmente independente, é dito maximal sse para qualquer $w \in V$, o subconjunto $\{v_i\} \cup \{w\}$ é linearmente dependente.

Proposição I - 2

Num dado espaço vetorial, V, o número de elementos de dois conjuntos maximais é sempre igual.

A proposição I - 2 nos permite associar a um espaço vetorial, um número característico para este espaço, a saber.

Definição I - 4

Dado um espaço vetorial, V, denomina-se dimensão do espaço, dimV, ao número de elementos dos conjuntos maximais.

A possibilidade de utilizar-se um certo conjun to de elementos de um dado espaço vetorial como sistema de referência ou coordenada neste espaço é expressa pela noção de base.

Definição I - 5

Dado um certo espaço vetorial, V, um subconjunto indexado, ou uma anupla ordenada, $\{v_i\} \subset V$, $1 \leq i \leq n$ é dito uma base de V sse para qualquer $w \in V$ está univocamente determinado o conjunto $\{ \alpha^i \}$, $\alpha^i \in R$, $1 \leq i \leq n$, tal que $w = \alpha^i v_i$.

Proposição I - 3

Dado um espaço vetorial, V, um subconjunto $B \subset V$ é base de V sse B é maximal.

Através do conceito de subespaço de um dado espaço vetorial procuraremos retratar algumas das propriedades do hiperplando de dimensão K, $K \leq n$, que possam pela origem em R^n.

Definição I - 6

Dado um espaço vetorial, V, o subconjunto $W \subset V$ será dito um subespaço de V se for fechado em relação as funções soma e produto, como definidas em $V \times V$ e $R \times V$, isto é, $W \subset V$ é subespaço de V sse

1) $\forall\, w \in W$, $\alpha \in R \rightarrow \alpha . w \in W$

2) $\forall\, w, y \in W \rightarrow w + y \in W$

Definição I - 7

Dado um espaço vetorial, V, e também W, X, subespaço de V, definimos W + X como o subconjunto de V:

$W + X = \{ v \in V \mid v = x + w \text{ onde } x \in X \wedge w \in W \}$

que denominamos "soma interna de W e X".

Se $X \cap W = \{0\}$ a soma interna de V e W denomina-se também soma direta interna de V e W, que notamos $V \oplus W$.

Proposição I - 4

Dado um espaço vetorial, V, e subespaço W e X temos que

1) $W \cap X$ é subespaço de V

2) W + X é subespaço de V

3) $\dim (W + X) = \dim W + \dim X - \dim (W \cap X)$

Definição I - 8

Dado um espaço vetorial, V, e um conjunto $\{v_i\} \subset V$ denominamos espaço gerado por $\{v_i\}$ ao menor subespaço, W, de V tal que $\{v_i\} \subset W$.

Definição I - 9

Dado V, dotado das funções $+_1 : V \times V \to V$ e $\cdot_1 : R \times V \to V$, e W, dotado das funções $+_2 : W \times W \to W$ e $\cdot_2$ de $R \times W \to W$, espaços vetoriais, definimos $V \oplus W$, a soma direta exterior de V e W, como sendo o conjunto $V \times W$ do tado das funções

$+ : (V \times W) \times (V \times W) \to (V \times W)$ definido por

$(v, w) + (x, y) = (v +_1 x, w +_2 y)$, e

$\cdot : R \times (V \times W) \to (V \times W)$ definida por

$\alpha \cdot (v,w) = (\alpha \cdot_1 v, \alpha \cdot_2 w)$

$\forall | \alpha \in R; \; v, x \in V; \quad w, y \in W$

Proposição I - 5

A soma direta exterior de dois espaços vetoriais é um espaço vetorial.

Trabalharemos a seguir com uma série de conceitos relativos a funções entre dois espaços vetoriais, funções estas que "respeitem a estrutura" dos espaços, isto é, sejam hamonorfismos.

Definição I - 10

Dados V e W espaços vetoriais, uma função $T : V \to W$ é uma transformação linear sse:

$\forall | \alpha \in R; \; v, x \in V$ temos que

1) $T(v + x) = T(v) + T(x)$ (homomorfo)

2) $T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$ (homogênea)

Proposição I - 6

Dados V e W, espaços lineares, e $T : V \to W$, u ma transformação linear, temos que $\forall \alpha;\ \beta \in R;\ v,x \in V$

1) $T(0) = 0$

2) $T(-v) = -v$

3) $T(\alpha \cdot v + \beta x) = \alpha \cdot T(v) + \beta \cdot T(x)$

Definição I - 11

Dados V e W espaços vetoriais e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear, definimos:

1) O núcleo de T, K(T), como sendo o subconjunto $K(T) \subset V$ dado por $K(T) = \{ v \in V \mid T(v) = 0 \}$

2) A imagem de T, R(T), como sendo o subconjunto $R(T) \subset W$ dado por $R(T) = \{ w \in W \mid \exists\, v \in V \text{ com } T(v) = w \}$

~~Proposição I - 7~~

Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow W$, V, W espaços vetoriais temos que

1) K(T) é subespaço de V

2) R(T) é subespaço de W

3) $\dim V = \dim K(T) + \dim R(T)$

4) $\dim K(T) = 0$ sse T é injetora

5) $\dim R(T) = \dim W$ sse T é sobrejetora

Definição I - 12

Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow W$, V e W espaços vetoriais, T diz-se um isomorfismo sse é bijetora.

Dois espaços vetoriais são isomorfos sse existe um isomorfismo entre eles.

Proposição I - 8

Dois espaços vetoriais são isomorfos sse tem a mesma dimensão.

Definição I - 13

Dado V e W, espaços vetoriais e $T : V \to W$, $S : V \to W$ transformações lineares, definimos:

1) A soma de T e S, $(T + S) : V \to W$ por

$$(T + S)(v) = T(v) + S(v), \quad \forall v \in V$$

2) O produto de T por um escalar, $(\alpha T) : V \to W$ por

$$(\alpha T)(v) = \alpha \cdot T(v), \quad \forall v \in V$$

Proposição I - 9

A soma de duas transformações lineares e o produto de uma transformação linear por um escalar, são também, transformações lineares.

Definição I - 14

Dados V e W, espaços vetoriais denominamos espaços das transformações lineares de V em W, L (V,W) e o conjunto das transformações lineares de V em W, dotado das operações de soma e de produto por escalas como definidas na definição I - 13.

Proposição I - 10

Dados V e W, espaços vetoriais, o espaço das transformações lineares de V em W, L (V,W) é um espaço vetorial, e tem-se que

1) O elemento neutro de L (V,W) é a aplicação
   $0 : V \to \{0\} \subset W$

2) $-T = -1 \cdot T$

3) $\dim L(V,W) = (\dim V) \cdot (\dim W)$

Definição I - 15

Dados V,W, X espaços vetoriais, $T \in L(V,W)$ e $S \in L(W,X)$ transformações lineares define-se o produto de S por T, $S \cdot T \in L(V,X)$, como sendo a composição de S e de T, isto é

$S \cdot T = S \circ T$

A última série de conceitos de álgebra linear que teremos de definir refere-se a noção de dualidade, que é uma maneira de se estabelecer um isomorfismo, entre um certo espaço vetorial V e o espaço das aplicações lineares de V em R, L (V,R).

Definição I - 16

Dado um espaço vetorial V, defini-se o espaço dual do espaço vetorial V como sendo o espaço vetorial das aplicações lineares de V em R, L (V,R), que se denotará também por V*.

Pela proposição I - 10 um dado espaço vetorial e seu dual tem a mesma dimensão, dim V = dim V*, logo, pela proposição I - 8 um dado espaço e seu dual são isomorfos. O próximo passo é pois definir um isomorfismo natural entre um espaço e seu dual.

Definição I - 17

Dado V um espaço vetorial, seu dual V* e $\{e_i\}$ $1 \leq i \leq \dim V$ base de V, denomina-se base dual de $\{e_i\}$, ao conjunto $\{e^*_i\} \subset V^*$ determinado pelas relações

$$e^*_i(e_j) = \delta^i_j \qquad i,j \in \{1,\ldots\ldots, \dim V\}$$

Proposição I - 11

A base dual de uma dada base de um certo espaço vetorial, V, é base do espaço dual deste espaço, V*.

Definição I - 18

Dado um espaço vetorial V, seu dual V*, $\{e_i\}$, base de V, $\{e^*_i\}$ a base dual de $\{e_i\}$ e $v \in V$ onde $v = a^i e_i$, o elemento $v^* \in V^*$ diz-se dual de v se

$$v^* = a^i e^*_i \qquad a^i \in R$$

Proposição I - 12

A aplicação $D : V \to V^*$ onde $D(v) = v^*$ como na definição I - 18 é um isomorfismo e independe da particular base de V usada.

Considerando-se o dual do dual do espaço vetorial V, V**, e o elemento v** pertencente a V**, dual de v*, isto é v** = (v*)*, tem-se as identidades:

$\forall$ v, w ε V, considerando v*, w* ε V* os duais de v, w e v**, w** ε V** os duais de v*, w* , w**(v*) = v*(w).

Para enfatizar estas simetrias usaremos também a notação $< v^* \mid w >$ definida por:

$$< v^* \mid w > \equiv < w \mid v^* > \equiv v^* (w)$$

Assim $< v^* \mid w > \doteq v^* (w) = w^{**} (v^*) = v^{***}(w^{**}) = \ldots$ nos dá naturalmente cadeias de isomorfismos:

$$V \leftarrow V^{**} \leftarrow V^{***} \leftarrow \ldots.$$

e

$$V^* \leftarrow V^{***} \leftarrow V^{*****} \leftarrow \ldots.$$

de modo que daqui por diante identificaremos o n-dual de um espaço vetorial V, a V* ou a V, conforme seja n impar ou par, respectivamente.

Ficam estabelecidos as seguintes convenções e nomenclaturas:

Dado um espaço vetorial V, seus elementos serão denominados vetores.

Dado uma base $\{e_i\}$ de V, onde um vetor v ε V se escreve $v = a^i e_i$, i ε { 1 ... dim V }, a^i ε R, os números a^i serão denominados componentes do vetor v na base $\{e_i\}$.

Quando se quiser distinguir os elementos de um espaço vetorial V, dos elementos do seu espaço dual V^*, denominar-se-á um elemento $v \varepsilon V$ de vetor, e um elemento $W \varepsilon V^*$ de covetor. Se ainda, $\{e_i\}$ for base de V e $\{E^i\}$ for base de V^*, os componentes de v em $\{e_i\}$ serão denominados componentes controvariantes, e serão notados sempre com índices superscritos ($v = a^i e_i$) e os componentes de w em $\{E^i\}$ serão denominados componentes covariantes e serão notados sempre com índices subscritos ($w = a_i E^i$). Os índices para um conjunto de vetores serão sempre subscritos e para um conjunto de covetores superscritos (como $\{e_i\}$ base de V e $\{E^i\}$ base de V^*).

Definição I - 19

Dada uma transformação linear $T \varepsilon L(V,W)$; $T^* \varepsilon L(W^*,V^*)$ diz-se dual de T se:

$$\forall / \; v \; \varepsilon \; V, \; w \; \varepsilon \; W^*, \; w\,(T(v)) = T^*(w)(v)$$

Definição I - 20

Dado um espaço vetorial V e um subconjunto $W \subset V$ denomina-se conjunto perpendicular por dualidade a W, $W^{\neq}$, ao conjunto

$$W^{\neq} = \{ \; x \; \varepsilon \; V^* \; | \; \forall / y \; \varepsilon \; W, \; < x \; | \; y > \doteq 0 \; \}$$

Proposição I - 13

Nas mesmas condições da definição I - 20 temos que

1) $W^{\neq}$ é um subespaço de V^* .

2) Se W é um subespaço de V, então $(W^{\neq})^{\neq} = W$

3) Dado $T \varepsilon L(V,X)$
$K(T^*) = (R(T))^{\neq}$ e $K(T) = (R(T^*))^{\neq}$

A idéia de tensor está intimamente relacionada em física, a idéia de associar um invariante, por exemplo uma "medida", a um determinado estado representado por grandezas vetoriais. O conceito de relatividade, isto é, de independência das leis físicas em relação ao estado do observador, ou do sistema de coordenadas ajusta-se perfeitamente a este tipo de estrutura matemática, como veremos nos capítulos seguintes.

Definição I - 21

Sendo $V_1, V_2 \ldots V_n$ espaços vetoriais uma função $F : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \rightarrow R$ é dita multilinear se $\forall \mid v_1 \varepsilon V_1 \;;\; v_2 \varepsilon V_2 \;,\; v_n \varepsilon V_n \;;\; W \varepsilon V_i \;;\; \alpha, \beta \varepsilon R$, $i \varepsilon \{1, \ldots, n\}$ temos que:

$$F(v_1, v_2, \ldots, \alpha v_i + \beta W, \ldots, v_n) =$$
$$= \alpha F(v_1, \ldots, v_n) + \beta F(v_1, \ldots, v_{i-1}, W, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

Definição I - 22

Dado V espaço vetorial, uma função multilinear $T_s^r : V^* \times V^* \times \ldots \times V^* \times V \times V \times \ldots V \rightarrow R$, onde o domínio é o produto cartesiano de r cópias de V^* por s cópias de V será denominado um Tensor, ou mais especificamente, um tensor r-vezes contravariante e s-vezes covariante, ou ainda, tensor de tipo (r,s).

Um número real será considerado como um tensor de tipo (0,0) e denominado escalar.

Proposição I - 14

Dado um espaço vetorial V, o componente dos tensores r-vezes contravariantes e s-vezes covariante, provido da soma e do produto por escalar usual de funções, é um espaço vetorial que denotar-se-á T^r_s, o espaço dos tensores r-vezes contravariantes e s-vezes covariantes em V.

Definição I - 23

Sendo V um espaço vetorial e T^r_s e T^p_q os espaços dos tensores r-vezes contravariantes e s-vezes covariantes, e o espaço dos tensores p-vezes contravariantes e q -vezes covariantes em V, respectivamente denomina-se produto tensorial a função:

$$\otimes : T^r_s \times T^p_q \rightarrow T^{r+p}_{s+q} \,,$$

$$\otimes (A^r_s , B^p_q) \rightarrow A^r_s \otimes B^p_q \,, \text{ definido por}$$

$$A^r_s \otimes B^p_q (v^1, \ldots\ldots, v^{r+p}, w_1, \ldots, w_{r+q}) \equiv$$

$$\equiv [A^r_s (v^1, \ldots, v^r, w_1, \ldots, w_s)] \,.$$

$$. [B^p_q (v^{r+1}, \ldots v^{r+p}, w_{s+1}, \ldots, w_{s+q})]$$

$\{v^i\} \subset V^*$, $\{w_j\} \subset V$, $i \in \{1,\ldots,r+p\}$ $j \in \{1,\ldots s+q\}$

Exemplos

1) Os tensores de T_1^0 são na realidade covetores, isto é, tomando qualquer $T_1^0 \in T_1^0$ vemos que T_1^0 é um elemento de V^*, ou mais exatamente $T_1^0 = V^*$.

2) Pela identificação que fizemos entre V^{**} e V (pag.) temos que $T_0^1 = V^{**} \sim V$.

3) O produto tensorial de r vetores e s covetores define um tensor $S_s^r \in T_s^r$, como segue

Sendo $S_s^r = v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes w^1 \otimes \ldots \otimes w^2$, temos

$$S_s^r\,(x^1,\ldots x^r, y_1, \ldots, y_s) = \langle v_1|x^1 \rangle . \ldots . \langle v_r|x^r \rangle . \langle w^1|y_1 \rangle . \ldots . \langle w^s|y_s \rangle$$

Proposição I - 15

Dado V espaço vetorial, $S, T \in T_s^r$; $R \in T_q^p$; $\{e_i\}$ base de V e $\{f_i\}$ base de V^*, tem-se:

1) $(R \otimes S) \otimes T = R \otimes (S \otimes T)$

2) $(S + T) \otimes R = S \otimes R + T \otimes R$

3) $R \otimes (S + T) = R \otimes S + R \otimes T$

4) $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \ldots \otimes f^{j_s}\}$, onde $i, j \in \{1, \ldots, \dim V\}$, que denominamos base canonica, é base de T_s^r.

É decorrência imediata da última proposição que $\dim T^r_s = (\dim V)^{r+s}$.

Demonstraremos, a título de exemplo, a última proposição no caso de ser $\{f^i\} = \{E^i\}$ onde $\{E^i\}$ é a base dual de $\{e_i\}$.

1) Provemos que $\{ e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes E^{j_1} \otimes \ldots \otimes E^{j_s} \}$ é L I:

impondo $$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \; e_{i_1} \otimes e_{i_r} \otimes E^{j_1} \otimes \ldots \otimes E^{j_s} = 0$$

vem, como caso particular, que

$$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \; e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes E^{j_1} \otimes \ldots \otimes E^{j_s} (E^{k_1}, \ldots E^{k_r}, e_{\ell_1}, \ldots e_{\ell_s}) = 0$$

como $< e_i | E^k > = < e^k | e_i > = \delta^k_i$, temos que

$$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \; \delta^{i_1}_{k_1} \ldots \delta^{j_s}_{\ell_s} = 0 \text{ , e portanto } T^{k_1 \ldots k_r}_{\ell_1 \ldots \ell_s} = 0$$

o que prova a independência linear.

2) Provemos agora que todo tensor do tipo (r,s) pode ser escrito como

$$T^r_s = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \; e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes E^{j_1} \otimes \ldots \otimes E^{j_s} \quad .$$

Sejam os números $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = T^r_s (E^{i_1}, \dots, E^{i_r}, e_{j_1}, \dots, \ell_{j_s})$

da primeira parte da demonstração vem que

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \quad e_{i_1} \otimes \dots \otimes E^{j_i} (E^{i_1}, \dots, e_{j_s}) = T^r_s (E^{i_1}, \dots, e_{j_s})$$

como $\{e_i\}$ é base de V

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \quad e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes E^{j_i} \otimes \dots \otimes E^{j_s} (v^1 \dots v^r, w_1 \dots, w_s) =$$

$$= T^r_s (v^1, \dots, v^r, w_1, \dots w_s)$$

o que termina a demonstração.

Teorema I - 1 (Teorema da mudança de base)

Seja V um espaço vetorial, $\{e_i\}$ e $\{f_i\}$ bases de V, $\{E^i\}$, $\{\phi^i\}$ as respectivas bases duais e seja ainda

$f_j = M^i_j \; e_i$ considerando M como uma matriz n x n (n = dim V) temos que

1) $e_j = (M^{-1})^i_j \; f_i$

2) Os componentes contravariantes de um vetor $v \in V$, nas diferentes bases

$v = a^i e_i = b^i f_i$, se relacionam por

$$b^i = (M^{-1})^i_j \quad a^j$$

3) As componentes covariantes se relacionam, dado

$w \in V^* \mid w = a_i E^i = b_i \phi^i$, por

$$b_i = M^i_j a_i$$

4) Considerando $\{ e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes E^{j_1} \otimes \ldots \otimes E^{j_s} \}$ e $\{ f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_r} \otimes \phi^{j_1} \otimes \ldots \otimes \phi^{j_s} \}$ como bases de T^r_s temos que:

as componentes $E^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ e $F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ de um tensor qualquer de tipo (r,s), respectivamente na primeira e na segunda das bases consideradas, se relacionam por:

$$F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = (M^{-1})^{i_1}_{k_1} \ldots (M^{-1})^{i_r}_{k_r} \cdot M^{\ell_1}_{j_1} \ldots M^{\ell_s}_{j_s} \cdot E^{k_1 \ldots k_r}_{\ell_1 \ldots \ell_s}$$

Proposição I - 16

As componentes do tensor resultante do produto tensorial de dois tensores são os prodtudos dos componentes dos mesmos, isto é, dados $T \in T^r_s$ e $R \in T^p_q$ temos

$$(T \otimes R)^{i_1 \ldots i_{r+p}}_{j_1 \ldots j_{s+q}} = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \cdot R^{i_{r+1} \ldots i_{r+p}}_{j_{s+1} \ldots j_{s+q}}$$

Na última proposição segue um resultado muito utilizado em física com o nome de "teorema do quociente", que é o seguinte:

Se uma função F, $F : V^* \times \ldots \times V^* \times V \times \ldots V \to R$, r-cópias de V^* e s-cópias de V, é definida em função da base $\{e_i\}$ escolhida para V por

$$F = F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \; e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes E^{j_1} \otimes \ldots \otimes E^{j_s}$$

onde $\{E^i\}$ é a base dual de $\{e_i\}$

e dados T, R, $T \in T^{r+p}_{s+q}$, $R \in T^p_s$; tivermos

$$T^{i_1 \ldots i_{r+p}}_{j_1 \ldots j_{r+q}} = F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \; R^{i_{r+1} \ldots i_{r+p}}_{j_{s+1} \ldots j_{s+q}}$$ como uma

identidade válida para os componentes de T e R nas respectivas bases canonicas associadas a $\{e_i\}$, para todas bases de V, então $F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ são as componentes de um tensor de tipo (r,s).

<u>Definição I - 24</u>

Dado V, espaço vetorial $T \in T^r_s$, denomina - se contração nos índices i e j, com $1 \leq i < r$ e $1 \leq j \leq r$ a u ma aplicação

$$C^i_j : T^r_s \to T^{r-1}_{s-1}$$

$$T \to C^i_j\ (T) \qquad \text{definida por}$$

1) dado $T = v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \ldots \otimes v_r \otimes w^1 \otimes \ldots \otimes w^j \otimes \ldots \otimes w^s$

$$C^i_j\ (T) = \langle v_i \mid w^j \rangle\ v_1 \otimes \ldots \hat{v}_i \ldots v_r \otimes w^1 \otimes \ldots \hat{w}^j \ldots \otimes w^s$$

2) $C^i_j\ (\alpha\ .\ T) = \alpha\ .\ C^i_j\ (T) \qquad \alpha \in R$

3) $C^i_j\ (T + R) = C^i_j\ (T) + C^i_j\ (R) \qquad T, R \in T^r_s$

Proposição I - 17

Dado $T \in T^r_s$ em um espaço vetorial V com base $\{e_i\}$, e sendo os componentes de T na base cônica de T^r_s

$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$, temos que os componentes de C^m_n (T) na base canonica de T^{r-1}_{s-1} são

$$T^{i_1, \ldots, i_{m-1}, k, i_{m+1}, \ldots i_r}_{j_1, \ldots, j_{n-1}, k, j_{n+1}, \ldots j_s}$$

no caso de termos um tensor $T \in T^1_1$ a única contração possível de T, C^1_1, resulta num escalar que denominamos o traço de T.

//

É através de um estabelecimento de uma forma bilinear num espaço vetorial que poderemos apresentar noções geometricamente intuitivas como a de comprimento de um vetor ou de ângulo entre vetores.

Nesta secção discutiremos, com algum detalhe, aspectos relativos a forma bilinear em espaços vetoriais.

Definição I - 25

Denomina-se forma bilinear, num dado espaço vetorial V, a um tensor $G \in T^o_2$, isto é, a uma função bilinear

$$G : V \times V \to R$$

eventualmente, quando não houver ambiguidade em relação a qual forma bilinear se refere-se utiliza-se também a notação

$$v \cdot w \quad \text{para} \quad G(v, w) \qquad v, w \in V$$

Construiremos agora alguns tensores de outros tipos que permitirão reinterpretações de uma forma bilinear, G, num espaço vetorial V.

Consideremos por exemplo a aplicação $H : V \to V^*$ definida por

$$< x | H(y) > = G(x, y) , \qquad \forall x, y \in V$$

e $K : V \to V^*$ definido por

$< K(x) | y > = G(x,y)$, $\forall x, y \in V$

se para uma base de V, $\{e_i\}$ e uma dual $\{E^i\}$, G é dado na base canonica por

$G = g_{ij} E^i \otimes E^j$

e x, y $\in$ V forem $x = X^i e_i$ e $y = Y^i e_i$

temos

$H(y) = g_{ij} < y | E^i > E^j = g_{ij} Y^i E^j = Y_j E^j$

e

$K(x) = g_{ij} E^i < x | E^j > = g_{ij} X^j E^i = X_i E^i$

Classificaremos nas definições seguintes alguns atributos importantes de forma bilinear, em função das quais, se deduzem muitos de suas propriedades.

Definição I - 26

Uma forma bilinear $G : V \times V \to R$ é dito não degenerada sse $x \in V$, $(G(x,y) = 0, \forall y \in V) \to x = 0$

Proposição I - 25

Uma forma bilinear G em V é não degenerada se:

1) as aplicações H e K, como definida na pag. , são isomorfismo.

2) Dada uma base $\{e_i\}$ de V para a qual G é dada na base cônica por

$$G = g_{ij}\, E^i \otimes E^j \quad , \quad \text{a matriz } (g) \text{ é inversível}$$

Demonstraremos a primeira parte da proposição: sendo $H : V \to V^*$ e $\dim V = \dim V^*$ devemos mostrar que H é inversível se G for não degenerado e, reciprocamente, que se G for não degenerado H é inversível.

Se H é inversível, para qualquer $x \in V$ se $x \neq 0$ então $H(x) \neq 0^*$, e portanto existe $y \in V$ tal que

$$< x \mid A(y) > = G(x, y) \neq 0$$

Por outro lado se G é não degenerada, dado $x \in V$, $x \neq 0$, existe $y \in V$ tal que

$$G(x, y) = < H(x) \mid y > \neq 0,$$

logo $H(x) \neq 0^*$ e H inversível, pois $\operatorname{Ker}(H) = \{0\}$.

<u>Definição I - 27</u>

Uma forma bilinear G em V é dita simétrica sse,

$\forall \mid x, y \in V$

$$G(x, y) = G(y, x).$$

A uma forma bilinear simétrica e não degenerada denomina-se também métrica.

Se uma forma bilinear G é uma métrica, as aplicações H e K, como definida na pag. , são idênticas e G define naturalmente um isomorfismo $H : V \to V^*$.

Dado um conjunto $\{x_i\}$ de vetores em V o conjunto $\{x^i\}$ de covetores associadas pelo isomorfismo H, $x^i = H(x_i)$, serão notadas com as mesmas letras, só que com os índices superscritos.

O covetor $x^i = H(x_i)$ será denominado representação covariante de x_i e o vetor $x_i = H^{-1}(x^i)$ será denominado representação contravariante de x^i.

Assim associar a um vetor x_i (a um covetor x^i) sua representação covariante (contravariante) será dito levantar (abaixar) o índice de x.

Definição I - 28

Uma forma bilinear G em V é dita antisimétrica sse, $\forall\ x, y \in V$

$$G(x, y) = -G(y, x).$$

Proposição I - 26

Toda forma bilinear G em V se decompõe na soma de uma forma simétrica, G_S, e uma forma antisimétrica, G_A, determinada por:

$$G_S(x, y) = \frac{G(x, y) + G(y, x)}{2}$$

$$G_A(x, y) = \frac{G(x, y) - G(y, x)}{2}$$

onde $x, y \in V$ e $G = G_S + G_A$.

Definição I - 29

Uma aplicação $Q : V \to R$, V um espaço vetorial, será dito uma forma quadrática sse existir uma forma bilinear G em V tal que:

$$Q(x) = G(x, x) \quad , \quad \forall x \in V .$$

Conhecendo uma forma quadrática Q, podemos sempre encontrar uma forma bilinear simétrica, G, tal que $Q(x) = G(x, x)$, $\forall x \in V$. Para tanto basta lembrar que:

$$G(x+y, x+y) = G(x, x) + G(y, y) + 2\,G(x, y)$$

e assim $G(x, y) = \dfrac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}$

será uma forma como a desejada.

Definição I - 30

Dado V, espaço vetorial, G, forma bilinear simétrica em V, e $W \subset V$, denomina-se conjunto perpendicular, em relação a G, ao conjunto W ao conjunto

$$W^{\perp} \equiv \{ x \in V \mid G(x, y) = 0, \ \forall y \in W \}$$

Proposição I - 27

Nas mesmas condições da definição I - 30, para qualquer $W \subset V$, $W^{\perp}$ é subespaço de V.

Definição I - 31

Dado V, espaço vetorial, G, forma bilinear simétrica em V e $x \in V$ define-se a norma de x, $\| x \|$, como sendo o número

$$\| x \| \equiv \sqrt{| G (x, x) |}$$

Definição I - 32

Uma forma bilinear simétrica, G, num espaço vetorial V, diz definida sse $x \in V, x \neq 0 \rightarrow G (x, x) > 0$, no caso positiva definida, ou então $x \in V, x \neq 0 \rightarrow G (x, x) <$ no caso negativa definida.

A forma bilinear simétrica G diz-se semidefinida sse $\forall \, x \in V, G (x, x) \geq 0$, no caso positiva semidefinida, ou então $\forall \, x \in V \rightarrow G (x, x) \leq$ no caso negativa semidefinida.

Definição I - 33

Num espaço vetorial V, dotado forma bilinear simétrica G, o subespaço nulo de V, N (G), é definio por:

$N(G) \equiv \{ x \in V \mid G(x, y) = 0 \quad \forall\, y \in V \}$.

Um espaço vetorial V dotado de uma métrica não definida G tem sempre subespaços onde a restrição da métrica é a métrica nula, pois de ser G não definida temos:

$\exists\, x, y \in V \mid x, y \neq 0 , \quad G(x, x) \geq 0$ e $G(y, y) \leq 0$

consideremos agora o vetor

$v_\beta = \beta x + (1 - \beta) y, \qquad \beta \in [0, 1]$.

A função $G(v_\beta, v_\beta)$ é contínua em β, não positiva em zero (0) e não negativa em hum (1), portanto

$\exists\, \gamma \in [0, 1] \mid G(x_\gamma, x_\gamma) = 0$

e o subespaço gerado por $\{x_\gamma\}$ é um subespaço onde a restrição de G é nula.

Definição I - 34

Uma base, $\{e_i\}$ de um espaço vetorial, V, dotado de uma forma bilinear simétrica, G, é dita ortonormal sse

$G(e_i, e_j) = \lambda_i \delta^i_j$ onde λ_i assume os valores de 0, + 1 ou - 1.

Proposição I - 28

Dado V, um espaço vetorial, e G uma forma bilinear simétrica em V existe ao menos uma base ortonormal de

V.

No seguimento do capítulo faremos repetidas vezes uso desta proprosição de modo que é útil demonstrá-la.

Procederemos a demonstração por indução na dimensão de V.

1) seja dim $V = 1$ e $x \varepsilon V$, $x \neq 0$

se $\| x \| = 0$ então $G = 0$ e tomamos $e_1 = x$.

se $\| x \| \neq 0$ tomamos $e_1 = x / \| x \|$.

Em ambos os casos $\{e_1\}$ é uma base ortonormal de V.

2) seja dim $V = d > 1$

Usemos como hipótese de indução que a proposição é válida para espaços de dimensão $e < d$.

se $G = 0$ então qualquer base de V é ortonormal.

se $G \neq 0$ existe $x \varepsilon V$ tal que $\| x \| \neq 0$ e tomamos $e_1 = x / \| x \|$.

Seja W o subespaço gerado por $\{e_1\}$.

Se provarmos que $V = W \oplus W^{\perp}$ a proposição está provada, pois como dim $W^{\perp} <$ dim V podemos usar a hipótese de indução para afirmar que existe uma base $\{ e_2 \ldots e_m \}$ de $W^{\perp}$ ortonormal, e $\{ e_1 \} \cup \{ e_2 \ldots e_m \}$ será uma base ortonormal de V.

a) Provemos que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$

Seja $y \varepsilon W \cap W^{\perp}$, então pela definição de $W^{\perp}$ $G (y, y) = 0$. Como, pela construção de W, se $y \varepsilon W$ $y \neq 0 \rightarrow G (y, y) \neq 0$ temos que $y = 0$.

b) Provemos que $V = W + W^{\perp}$

Para tanto mostremos que $\forall\, y \in V$, $\exists\, \beta \in R$ tal que $y - \beta e_1 \in W^{\perp}$.

Seja $x \in W$ como dim $W = 1$ $\exists\, \alpha \in R \mid x = \alpha e_1$. Se fizermos $\beta = G(e_1, e_1)\, G(y, e_1)$ temos que

$$G(y - \beta e_1, x) = \alpha\,(G(y, e_1) - \beta\, G(e_1\, e_1)) =$$

$$= \alpha\, G(y, e_1)\,(1 - G(e_1, e_1)^2) = 0. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Com o tipo de raciocínio usado na demonstração da última proposição poderiamos provar alguns outros resultados interessantes como que:

Dado W, subespaço de V, no qual a restriçao da forma bilinear simétrica G de V seja definida, temos que $V = W \oplus W^{\perp}$. Ou então que, dada G definida em V, para qualquer subespaço de W temos $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Pela próxima proposição procuraremos associar a uma foram bilinear simétrica G certas características examinando a matriz de suas componentes (g_{ij}), definida por $G = g_{ij} \cdot E^i \otimes E^j$ na base conica associada, dada uma base ortonormal $\{e_i\}$ de V.

Proposição I - 29

Dada uma forma bilinear simétrica G em V e $\{e_i\}$ uma base ortonormal de V temos que:

1) O número de elementos da diagonal da matriz (g_{ij}) iguais

a 1 é igual a máxima dimensão de um subespaço no qual a restrição da forma bilinear seja positiva definida.

2) O número de elementos da diagonal da matriz (g_{ij}) iguais a -1 é igual a máxima dimensão de um subespaço na qual a restrição da forma bilinear seja negativa definida.

3) O número de elementos da diagonal da matriz (g_{ij}) iguais a zero é igual a dimensão do subespaço nulo de V, N (G).

demonstração:

1) Reindexemos os índices de $\{e_i\}$ de modo que

$$G(e_i, e_i) = \begin{cases} 1, & \text{para } 1 \leq i \leq k \\ 0 \text{ ou } -1, & \text{para } k < i \leq (\dim V) = n \end{cases}$$

Seja W o subespaço gerado por $\{e_j\}, j \in \{1..k\}$, e seja L um subespaço de V para o qual $\forall | z \in L, z \neq 0 \to G(z, z) > 0$ de maior dimensão possível.

Devemos provar que dim L = dim W.

a) Provemos que dim L $\leq$ dim W .

Seja $P : L \to W$ o operador de projeção, definido por:

dado $x = X^i e_i$, $i = \{1...n\}$, $P(x) = X^j e_j$, $j \in \{1...k\}$

Seja $z \in L \mid P(z) = 0$ então,

$$G(z, z) = g_{i\ell} z^i z^\ell = g_{ii}(z^i)^2 = g_{mm}(z^m)^2 \leq 0$$

onde $z = z^i e_i$, $i, \ell \in \{1 \ldots n\}$ e $m \in \{k+1, \ldots n\}$;

pois $g_{mm} \leq 0$.

Da definição de L segue que $z = 0$ e portanto o núcleo de P, $K(P) = 0$, e P é injetora, e assim dim L $\geq$ $\geq$ dim W.

b) Provemos que dim L $\geq$ dim W

É imediato da exigência de dim L ser máxima e do fato de G restrita a W ser positiva definida.

2) A demonstração é análoga a parte 1)

3) Reindexemos novamente a base $\{e_i\}$ de modo que:

$$\| e_i \| \begin{cases} = 0 & \text{se } i \in \{1 \ldots p\} \\ \neq 0 & \text{se } i \in \{p+1 \ldots n\}. \end{cases}$$

É fácil ver que o espaço gerado por $\{e_h\}$, $h \in \{1 \ldots p\}$ está contido em N (G).

É reciprocamente se se $x \in N(G)$ temos, que $G(x, e_i) = 0$, se $x = x^i e_i$ temos que

x^ℓ, $\ell \in \{p+1 \ldots n\} = 0$

e o vetor x está no subespaço gerado por $\{e_h\}$

Q.E.D.

Da última proposição conclui-se que o número de elementos nulos, positivos e negativos na diagonal da matriz das componentes de uma forma bilinear independe de qual a partícula base ortonormal escolhida, e assim definimos.

Definição I - 35

Dada G forma bilinear em V, $\{e_i\}$ base ortonormal de V, (g_{ij}) a matriz da componente de G definida por

$$G = g_{ij}\, E^i \otimes E^j \qquad , \qquad \{E^i\} \text{ a base dual de } \{e_i\} ,$$

estão definidas.

1) O índice de G, $I(G)$, como o número de elementos negativos na diagonal de (g_{ij}).

2) A nulidade de G, $n(G)$, com o número de elementos nulos na diagonal de (g_{ij}).

3) O traço de G, $T(G)$, como a somatória dos elementos da diagonal de (g_{ij}).

4) A assinatura de G, $A(G)$, como

$$A(G) \equiv \dim V - n(G) - 2\, I(G).$$

Encontrar uma base ortonormal para uma forma bilinear simétrica qualquer pode às vezes ser custoso, mas para uma métrica positiva definida G em V existe um algarismo simples, conhecido como método de Gram-Smith, que é o seguinte:

Seja $\{e_i\}$ uma base qualquer de V, temos que $\{E_i\}$,

onde $E_i = g_i / \| g_i \|$ e $g_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} | G(e_j, g_j) / G(g_j, g_j) | g_j$,

é uma base ortonormal de V.

Com as próximas definições e proposições obteremos uma série de inequações que necessitaremos no seguimento da tese.

Proposição I - 30

Dada G métrica positiva definida em V têm-se:

1) a desigualdade de Schwartz

$$G(x, y) \leq \| x \| \cdot \| y \| , \quad \forall x, y \in V.$$

2) a desigualdade triangular

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

demonstremo-las

1) se $x = 0$ ou $y = 0$ a inequação se reduz a igualdade
se $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ tomemos $z = G(x, Y)y - G(x, y)x$
e de $\| z \| \geq 0$ segue a desigualdade de Schwartz.

2) Observemos inicialmente que

$$\| x + y \| = \sqrt{G(x + y, x + y)} =$$
$$= \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 G(x, y)}.$$

Da desigualdade de Schwartz segue agora a desigualdade triangular.

Definição I - 36

Dados V, W, espaços vetoriais, $T \in L(V, W)$, G simétrica em V e M métrica em W define-se a norma de T, $\| T \|$, como sendo

$$\| T \| = \sup \{ \| T(x) \| , \forall x \in V \mid \| x \| \leq 1 \}.$$

Proposição I - 31

Nas mesmas condições da definição I - 36 temos para quaisquer $T, R \in L(V, W)$; $x, y \in V$; $\alpha, \beta \in R$; $S \in L(W, V)$ que:

1) $\| T(x) - T(y) \| \leq \| T \| . \| x - y \|$

2) $\| (T + R)(x) \| \leq (\| T \| + \| R \|) . \| x \|$

3) $\| T . S \| \leq \| T \| . \| S \|$

4) Se a métrica G em V for positiva definida verifica - se também para $T, R \in L(V, V)$ que se T é inversível, $\| T^{-1} \| = 1/\alpha$ e $\| R - T \| = \beta < \alpha$ então R também é inversível.

Provemos esta última afirmação.

De um lado observamos que

$$\| x \| = \| T^{-1}(x) \| \leq \alpha^{-1} \| T(x) \|$$

de outra parte

$$(\alpha - \beta) \| x \| \leq \| T (x) \| - \| (R - T)(x) \| \leq \| R (x) \|$$

de modo que, como $(\alpha - \beta) > 0$

$\| R (x) \| = 0 \rightarrow \| x \| = 0 \rightarrow x = 0$, pois G não é degenerada.

Assim R tem por núcleo $\{ 0 \}$ e é um isomorfismo.

A última definição e proposição desta secção são de interesse meramente histórico e mostram como se poderiam interpretar graficamente a operação de levantar ou abaixar o índece de um vetor.

Definição I - 37

Dada G, métrica positiva definida em V, e $\{e_i\}$ base de V denominamos base recíproca da base $\{e_i\}$ à base $\{E_i\}$ definida por

$$G (e_i , E_j) = \delta^i_j .$$

Proposição I - 32

A base recíproca de uma dada base existe, é única e é uma base.

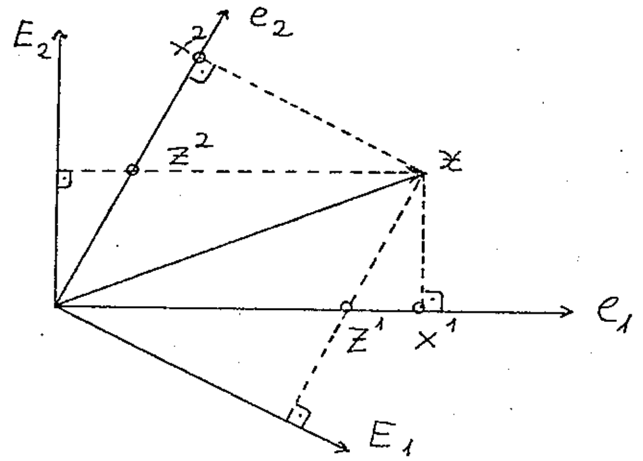
Além disto, se nas mesmas condições da definição I - 37 seja $\{E^i\}$ a base dual de $\{e_i\}$ e $x_k \in V$

se $x_k = X^i e_i = Z^i E_i$,

então a representação covariante de x_k é

$$x^k = g_{ij}\, X^i\, E^i = X_i\, E^i \qquad \text{e} \qquad Z^i = X_i$$

A figura ilustra a situação.



//

A última secção do capítulo é inteiramente dedicada ao estudo de simetrias de tensores. Esta preocupação é plenamente justificada pelo fato de muitos tensores, dos que mais frequentemente ocorrem em física e em matemática, apresentarem muitas simetrias internas.

Definiremos também, no decorrer da secção, subespaços de um espaço tensorial caracterizado por propriedades de simetria de seus elementos. Operando nestes subespaços simplificaremos enormemente um grande número de problemas no futuro, veja por exemplo, a teoria de integração sobre variedades.

Definição I - 38

Um tensor $T \in T_s^r$ em V dir-se-á simétrico no p-esimo e no q-esimo vetores, ou no p-esimo e no q-esimo covetores sse, para quaisquer $x_i \in V$ e $y^i \in V^*$, tivermos respectivamente :

$$T\,(y^i,\ldots,\, y^r,\, x_1,\ldots,\, x_{p-1},\, x_p,\, x_{p+1},\ldots x_{q-1},\, x_q,\, x_{q+1},\ldots x_n) =$$

$$= T\,(y^1\ldots y^r,\, x_1,\ldots x_{p-1},\, x_q,\, x_{p+1},\ldots x_{q-1},\, x_p,\, x_{q+1},\ldots\, x_i),\text{ou},$$

$$T\,(y^1,\ldots,y^{p-1},\, y^p,\, y^{p+1},\ldots,y^{q+1},\, y^q,\, y^{q+1},\ldots y^r,\, x_1,\ldots,x_p) =$$

$$= T\,(y^1,\ldots,y^{p-1},\, y^q,\, y^{p+1},\ldots,y^{q-1},\, y^p,\, y^{q+1},\ldots y^r,\, x_1\ldots,x_i).$$

Proposição I - 33

As componentes de um tensor simétrico no p-esimo e no q-esimo vetores, ou no p-esimo e no q-esimo covetores, são, respectivamente, simétricos no p-esimo e no q-esimo indica covariantes, ou contravariantes, para qualquer base de V e sua respectiva base conica.

Se um tensor é simétrico em dois quaisquer vetores e em dois quaisquer covetores será denominado totalmente simétrico.

Definição I - 39

Denomina-se operador de simetrização a um o perador S: $T^r_s \to T^r_s$, $S(T) = T_{Sim}$, definido por:

$$T_{Sim}(y^1 \dots y^r, x_1, \dots x_n) =$$

$$= \frac{1}{r!\, s!} \sum_{\pi(1,\dots,r)} \sum_{\pi(1,\dots,s)} T(y^{s_1}, \dots, y^{s_r}, x_{j_1}, \dots x_{j_s}).$$

onde $\pi(1 \dots t)$ indica as permutações de $(1,..,t)$.

O operador de simetrização leva tensores arbitrários de tipo (r,s) em tensores de tipo (r,s) totalmente simétricos. O fator ($1/\, r!\, s!$) foi colocado de modo a manter tensores totalmente simétricos invariantes pelo operador de simetrização.

Em termos das componentes, temos a relação

$$T_{Sim}{}^{\ell_1 \dots \ell_r}{}_{k_1 \dots k_s} = \frac{1}{r!\, s!} \sum_{\pi(1 \dots r)} \sum_{\pi(1 \dots s)} T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s}$$

onde se vê que para conhecer um tensor totalmente simétrico basta conhecer suas componentes.

$$T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} \qquad \text{com } i_1 \le i_2 \le \dots .\ i_r \ \text{ e } j_i \le j_2 \le \dots \le j_s$$

Proposição I - 34

O conjunto $\$^r_s$ dos tensores totalmente simétricos de T^r_s é um subespaço, e sua dimensão é dada por:

$$\dim \$^r_s = \binom{(\dim V) + r - 1}{r} \cdot \binom{\dim V + s - 1}{r}$$

onde $\binom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha\,!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}$

O produto tensorial de dois tensores simétricos não é, em geral, um tensor simétrico o que justifica definirmos uma nova operação com esta característica.

Definição I - 40

Denomina-se produto simétrico a um operador $\cdot : \$^r_s \times \$^p_q \to \$^{r+p}_{r+q}$, $\cdot\ (T,R) \to T \cdot R$, definido por:

$T \cdot R \equiv (T \otimes R)_{Sim}$.

Proposição I - 35

Nas mesmas condições da definição I - 40, $\forall\, \alpha \in R$ temos

1) $\alpha (T \cdot R) = (\alpha T) \cdot R = T (\alpha R)$

2) $T \cdot (R + S) = T \cdot R + T \cdot S$

3) $(T \cdot R) \cdot S = T \cdot (R \cdot S)$

4) $T \cdot R = R \cdot T$

De maneira análoga a que se procedeu com a propriedade de simetria proceder-se-á agora com a propriedade de anti-simetria.

Definição I - 41

Um tensor $T \varepsilon T^r_s$ dir-se-á anti-simétrico no p-esimo e no q-esimo vetores, ou covetores, se para quaisquer $x_i \varepsilon V$, $y^i \varepsilon V^*$ se tiver, respectivamente:

$$T\ (y^1,\ldots,y^r,\ x_1,\ldots,x_{p+1},\ x_p,\ x_{p+1},\ldots,\ x_{q-1},\ x_q,\ x_{q+1},\ldots x_s) =$$

$$= -T\ (y^1,\ldots,y^r,x_1,\ldots,x_p,\ x_q,\ x_{p+1},\ldots x_{q-1},\ x_q\ ,x_{q+1},\ldots x_s),\ \text{e}$$

$$T\ (y^1,\ldots,y^{p-1},y^p,\ y^{p+1},\ldots y^{q-1},\ y^q,\ y^{q+1},\ldots y^r,\ x_1,\ldots x_s) =$$

$$= -\ T\ (y^1,\ldots,y^{p-1},y^q,\ y^{p+1},\ldots,y^{q-1},y^p,y^{q+1},\ldots y^r,\ x_1,\ldots,x_s).$$

Proposição I - 35

As componentes de um tensor antisimétrico no p-esimo e no q-esimo vetores, ou covetores, são respectivamente simétricos na troca dos p-esimos e q-esimos índices covariantes, ou contravariantes.

Tem-se ainda que um tensor é antisimétrico no p-esimo e no q-esimo vetores, ou de maneira análoga nos covetores, sse

$$T\ (y^1\ldots,y^r,x_1,\ldots,x_{p-1},W,\ x_{p+1},\ldots x_{q-1},W,x_{q+1},\ldots x_s) = 0$$

$\forall\, y^i \in V^*$ e x_i, $W \in V$. Para verificar a afirmação basta fazer $W = W_1 + W_2$ e usar a linearidade de T.

A um tensor antisimétrico na troca de quaisquer dois vetores ou covetores denomina-se tensor completamente antisimétrico.

De maneira análogo o caso simétrico define--se.

Definição I - 42

Denomina-se operador de antisimetrização ao operador $A : T^r_s \to T^r_s$. $A(T) \to T_{Ant}$, definido por

$$T_{Ant}\,(y^1,\ldots,y^r, x_1, \ldots x_s) =$$

$$= \frac{\Lambda}{r!\; s!} \sum_{\pi_1(1\ldots r)} \sum_{\pi_2(1\ldots s)} S_{gn}(\pi_1)\, S_{gn}(\pi_2)\; T\,(y^{i_1},\ldots,$$

$$\ldots, y^{i_r}, x_{j_1},\ldots, x_{j_i}).$$

Vê-se que em termos das componentes

$$T_{Ant}{}^{\ell_1\ldots\ell_r}_{k_1\ldots k_s} = \frac{\Lambda}{r!\; s!} \sum_{\pi_1(1\ldots r)} \sum_{\pi_2(1\ldots s)} S_{gn}(\pi_1) S_{gn}(\pi_2)\; T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$$

Proposição I - 36

O conjunto $\Lambda\, T^r_s$, dos tensores de tipo (r,s) completamente antisimétrico, é um subespaço de T^r_s e,

$$\dim \Lambda T^r_s = \binom{\dim V}{r} \cdot \binom{\dim V}{s}$$

O subespaço ΛT^r_o será também notado $\Lambda^r V$ e o subespaço ΛT^o_s, $\Lambda^s V^*$.

Queremos agora definir uma operação similar ao produto tensorial que preserve a anti-simetria.

Definição I - 43

Denomina-se produto exterior, ou produto antisimétrico, ou produto de Grassmann, ao operador

$$\Lambda : \Lambda T^r_s \times \Lambda T^p_q \to \Lambda T^{r+p}_{r+q} ,$$

$\Lambda\ (T,R) \to T \Lambda R$, definido por

$$T \Lambda R \equiv (T \otimes R)_{Ant}$$

Proposição I - 37

Nas mesmas condições da definição I - 43 têm-se :

1) $\alpha (T \Lambda R) = (\alpha T) \Lambda R = T \Lambda (\alpha R)$

2) $T \Lambda (R \Lambda S) = (T \Lambda R) \Lambda S$

3) $T \Lambda (R + S) = T \Lambda R + T \Lambda S$

4) $T \wedge R = (-1)^{(rp + sp)} R \wedge T$

para quaisquer $T \in T^r_s$, $R \in T^p_q$, $S \in T^n_o$, $\alpha \in R$.

O subespaço, de T^r_s, $\wedge T^r_0 = \wedge^r V$ que denominamos espaço dos r-formas em V é de importância fundamental em toda a matemática e no restante da secção exporemos vários conceitos e propriedades importantes destes espaços.

Definição I - 44

Dado V, espaço vetorial e uma aplicação $A \in L(V, V)$ sejam as aplicações

$d^n_A : \wedge^n V \to \wedge^n V$ definidos por

$d^n_A (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = A(x_1) \wedge \ldots \wedge A(x_n)$, $x_i \in V$.

O operador d^n_A está bem definido e se dim V= = m, como $\wedge^m V$ é unidimensional.

$d^m_A : \wedge^m V \to \wedge^m V$ é o produto por um escalar. A este escalar, que se nota $|A|$, denomina-se o determinante da aplicação A

Proposição I - 37

Para o determinante de uma aplicação, como definido em I - 44 tem-se que:

1) $| A . B | = |A| . |B| \quad \forall A, B \in L(V,V)$

2) O determinante da aplicação A é o determinante da matriz das componentes* da aplicação A, (A_{ij}), onde dada $\{e_l\}$ base

$$A (e_j) = A^i_j e_i$$

Para verificar a veracidade da primeira afirmação basta ver que

$$|A . B| \; e_1 \wedge \ldots \wedge e_m = AOB\ (e_1) \wedge \ldots \wedge AOB\ (e_m) =$$

$$= |A|\ B(e_1) \wedge \ldots \wedge B(e_n) = |A| . |B|\ e_1 \wedge \ldots \wedge e_m$$

A próxima tarefa será a de extender a noção de métrica em V para $\Lambda^r V$.

Definição I - 45

Dado V espaço vetorial, G forma bilinear simétrica em V e $E = \{e_i\}$ base de B, sabemos que

$$\{ e_{j_1} \wedge \ldots \wedge j_n \}, \text{ onde } 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots j_n \leq \dim V$$

é uma base de $\Lambda^n V$, que notaremos PCE^n, ou seja, a base de $\Lambda^n V$ dos produtos exteriores das permutações dos elementos de E n a n com índices crescentes.

* Veja por exemplo (Kunze , 76)

seja $PCE^n = \{ \eta_k \}, \ k \in \{ 1, \dots, \binom{\dim V}{n} \}$

onde $\eta_k = e_{K_1} \wedge \dots \wedge e_{K_n}$, $K_i \in \{ 1 \dots \dim V \}$

Definimos agora a extenção de G a $\Lambda^m V$ como sendo o operador linear

$G : \Lambda^n V \times \Lambda^n V \to R$ definido por

$G (\eta_k, \eta_\ell) = | G (e_{K_i}, e_{L_j}) |$

onde o último termo significa o determinante da matriz que tem por elementos i, j, $G (e_{K_i} , e_{L_j})$.

Verifica-se ainda que se $\{e_i\}$ for ortonormal e G for não degenerada, isto é uma métrica.

$G (\eta_k , \eta_\ell) = \pm \delta^k_\ell$, ou seja P C E é uma base ortonormal e é não degenerada.

Os espaços $\Lambda^n V$ e $\Lambda^r V$, onde $n + r = \dim V$ tem mesma dimensão, podemos portanto, procurar um isomorfismo entre eles.

Definição I - 46

Denomina-se operador de Hodge a um operador

$* : \Lambda^r V \to \Lambda^n V$, onde $n + r = \dim V$, definido por

$A \wedge B = G (*(A), B) \, e_1 \dots e_{\dim V}$

$A \in \Lambda^n V$, $B \in \Lambda^r V$ e $\{e_i\}$ base de V.

Proposição I - 38

O operador de Hodge, como definido em I -46, é, uma vez fixada uma base $\{e_i\}$ de V um isoformismo.

Além disto seja $\{f_i\}$ uma outra base de V, * o operador de Hodge definido em $\{e_i\}$ e H o operador de Hodge definido em $\{f_i\}$, verifica-se que, $\forall\ A \in \Lambda^n V$

$$* (A) = \delta H (A)$$

onde δ é +1 ou -1 conforme o sinal do determinante da matriz de mudança de base, $M^i j$ definido por

$f_i = M_i^j\ e_j$, seja positivo ou negativo.

Por isto dizemos que o operador de Hodge está bem definido para uma dada orientação do espaço V. Onde por orientação entendemos uma das duas classes de equivalência, em que se parte o conjunto nas bases de V, se considerarmos duas bases equivalentes sse a respectiva matriz de mudança de base tiver determinante positivo.

Usando a mesma notação da definição I - 45, temos ainda que, dada $E = \{e_i\}$ base de V, $P \subset E^n = \{\eta_k\}$ base de $\Lambda^n V$, $P \subset E^r = \{\gamma_\ell\}$ base de $\Lambda^r V$, de modo que $r + n =$ $=$ dim V, então:

$*\eta_k = \pm\, G\,(\gamma_\ell, \gamma_\ell)\ \gamma_\ell$ (nenhuma somatória)

onde

$\eta_k = e_{K_1} \wedge \dots \wedge e_{K_n}$, $1 \leq K_1 < \dots < K_n \leq \dim V$.

$\gamma_\ell = e_{L_1} \wedge \dots \wedge e_{L_r}$, $1 \leq L_1 < \dots < L_r \leq \dim V$.

$\{ K_1, \dots, K_n \} \quad \{ L_1, \dots L_r \} = \emptyset$

e o sinal é dado por

$S_{gn}\,(i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_r)$ onde

~~$(i_1 \dots i_n, j_1, \dots j_r)$ é considerado~~ permutação de

$(1 \dots \dim V)$.

Para mostrar a identidade notemos que:

$$G\,(*\eta_k, \gamma_\ell) = G\,(G\,(\gamma_\ell, \gamma_\ell)\,\gamma_\ell, \gamma_\ell) =$$

$$= G\,(\gamma_\ell, \gamma_\ell)^2 = 1$$

e também que:

$$\eta_k \wedge \gamma_\ell = \pm 1\, e_1 \wedge \dots \wedge e_{\dim V}\,.$$

Proposição I - 46

Com a mesma notação da proposição anterior temos que $\forall A \in \Lambda^n V$, sendo G a métrica de V e T (G) o seu traço.

$$*(*A) = (-1)^{\beta} A, \quad \text{onde}$$

$$\beta = n(\dim V - n) + (\dim V - T(G))/2$$

Exemplo:

Seja V um espaço vetorial de dimensão 4, G métrica em V, e $\{e_i\}$ base ortonormal de V com

$$G(e_i, e_i) = \begin{cases} +1, & \text{para } i \in \{1, 2, 3\} \\ -1, & \text{para } i = 4 \end{cases}$$

Consideramos o espaço $\Lambda^2 V$

Temos que para qualquer permutação ciclica de (1, 2, 3) , (k, ℓ , m).

$$*(e_k \wedge e_\ell) = -e_m \wedge e_4 \quad \text{e}$$

$$*(e_m \wedge e_4) = e_k \wedge e_\ell$$

e $\beta = 2(4-2) + \frac{1}{2}(4-(3-1)) = 4 + 1 = 5$

de modo que $A \in \Lambda^2 V$,

$$*(*A) = (-1)^5 A = -A$$

CAPÍTULO - II

A topologia algébrica e um campo relativamente recente na matemática tendo menos de cem anos de história. A sua importância é contudo enorme em nossos dias.

Muitos conceitos de topologia algébrica estão na mente dos matemáticos, ainda que não o digam explicitamente, ao propor certas definições ou teoremas. Talvez em nenhuma outra área isto seja notável tão como na geometria diferencial.

Tratamos neste capítulo de relacionar os fatos da topologia algébrica mais relevantes para o desenrolar da dissertação.

Mesmo no nível do material aqui apresentado o capítulo, para que fosse mantido mais rigoroso, poderia ser consideravelmente maior. Preferimos contudo uma abordagem mais intuitiva e condensada.

O material foi dividido em quatro secções.

A primeira, homotopia, é de caráter introdutória e visa apenas mencionar alguns rudimentos indispensáveis de homotopia.

A segunda e a terceira secções, homologia e invariância de domínio, são os principais da secção. O teorema da invariância de domínio é um resultado importante e não trivial, mas que por ser muito intuitivo, deixa muitas vezes de ser mencionado.

A última secção, homologia singular, é a mais informal das quatro e pretende, na medida do possível, basear-se na intuição adquirida nas precedentes.

Nesta secção faremos um apanhado muito rápido de uns poucos elementos de homotopia, apenas o estritamente necessário para o restante da dissertação.

A noção básica de homotopia é a de estabelecer uma relação de equivalência entre as aplicações contínuas entre dois espaços topológicos T_1 e T_2.

<u>Definição II - 1</u>

Sejam T_1, T_2 espaços topológicos e f, g funções contínuas $f, g : T_1 \rightarrow T_2$.

Seja $T_1 \times I$ o espaço produto de T_1 por $[0, 1]$ e $P \in T_1 \times I$ da forma (x, t), $x \in T$, $t \in I$.

As funções f e g são homotópicas, $f \sim g$, sse existir uma função contínua $H : T_1 \times I \rightarrow T_2$, que seja uma homotopia entre f e g, isto é

$H : T_1 \times I \rightarrow T_2$ e tal que

$H(x, 0) = f(x)$

$H(x, 1) = g(x)$.

Estaremos apenas interessados no estudo de casos muito particulares da teoria de homotopia. Imporemos desde já as restrições:

1) O espaço T_1 é o próprio intervalo $[0,1]$ isto é:

$H: I \times I \to T \mid H(s, 0) = f(s)$ e $H(s, 1) = f(s)$.

2) Consideraremos apenas as homotopias a extremos fixos, isto é

Dado $f, g : I \to T \mid f(0) = g(0) \wedge f(1) = g(1)$

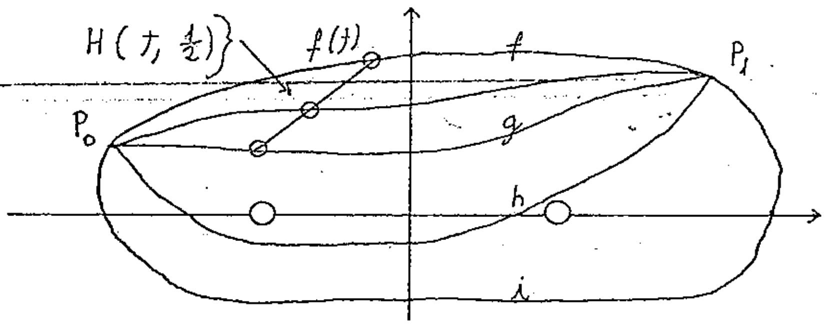
$H : I \times T \to T$ deve ser tal que

$H(t,0) = f(t)$, $H(t,1) = g(t)$

$H(0,s) = f(0)$ e $H(1,s) = f(1)$

Exemplo:

Seja $T = R_2 - \{ (1,0) , (-1,0) \}$



Representando graficamente quatro caminhos f, g, h, i, de $I \to T$, os únicos dois caminhos homotópicos seriam f e g, onde H poderia ser dado por

$$H(t,s) = s \cdot f(t) + (1 - s) g(t)$$

Proposição II - 1

A relação de homotopia é uma relação de equi valência no espaço dos caminhos $f: I \rightarrow T$ de início em $P_0 \varepsilon T$ e em fim em $P_1 \varepsilon T$, isto é com $f(0) = P_0$ e $f(1) = P_1$, qualquer que seja o espaço topológico T.

Nosso objetivo é definir uma estrutura algébrica no espaço quociente, do espaço do caminho em T com um mesmo começo P_0 e um mesmo fim P_1, pela relação de homotopia.

Sem perder nada importante e simplificando a notação, restringiremos a caminhos em T ou laços em T.

Definição II - 2

Diz-se laço em um espaço topológico T a um caminho cujo começo e o fim coincidam, isto é, uma função

$$f : I \rightarrow T \ , \text{ contínua}, \ | \ f(0) = f(1)$$

ao ponto $P = f(0) = f(1)$ denomina-se base do laço.

Definição II - 3

Sejam f e g dois laços em um espaço topológico T e de base P define-se o produto de f e g como o laço:

$$f * g\,(t) = \begin{cases} f(2t) \ , \text{ para } \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1), \text{ para } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Proposição II - 2

Dados e, f, g, h laços de mesma base P em um espaço topológico T , $|h|$ a classe dos laços homotópicos ao laço h temos que

1) $\forall\, e \in |f|$, $h \in |g|$

$|f * g| = |e * h|$

Em virtude da proposição anterior podemos definir uma operação entre as classes, como segue.

Definição II - 4

Nas mesmas condições da proposição definimos

$|f| \; 0 \; |g| \equiv |f * g|$

Proposição II - 3

O conjunto das classes de equivalência dos laços com base P num espaço topológico T, dotado da operação 0, como na definição II - 4 é um grupo, que notaremos π_1 (T, P).

Temos ainda que:

1) O elemento neutro de π_1 (T,P) é $|c|$, onde c é o laço constante.

$c: I \to \{P\} \subset T$

2) Dado o laço $f : I \to T$

$|f|^{-1} = |\tilde{f}|$, onde

$\tilde{f} = f(1 - t)$

As proposições seguintes ilustram algumas propriedades do grupo $\pi_1(T, P)$.

Proposição II - 4

: Se T é um espaço topológico conexo por caminhos, então $\pi_1(T, P)$ é isomorfo a $\pi_1(T, Q)$, quaisquer que sejam P e Q pertencentes a T.

Proposição II - 5

Se T e U são espaços topológicos conexos e homeomorfos, então $\pi_1(T, P)$ e $\pi_1(U, Q)$ são isomorfos , $P \in T$, $Q \in U$.

———— // ————

Entre 1895 e 1901 o matemático francês Henri Poincaré desenvolveu as idéias básicas da topologia algébrica e, em especial, da homologia. A abordagem de Poincaré opunha-se a abordagem da topologia usual, conjuntista, e procurava retratar de maneira mais natural, ou geometricamente intuitiva, propriedades topológicas de um espaço.

Nesta secção desenvolveremos os conceitos básicos de homologia na medida do necessário para podermos de finir o grupo de homologia.

A estrutura básica da teoria é o n-simplex, que de alguma forma, representa a figura geométrica fundamental da dimensão n.

Definição II - 5

Define-se como n-simplex, ou simplex de dimensão n, em R^m a um conjunto, $\{a_i\}$, $a_i \in R^m$, $i \in \{0,\dots n\}$ tal que os pontos a_i estejam em posição geral, isto é, não estejam contidos em nenhum hiperplando de dimensão n - 1.

Definição II - 6

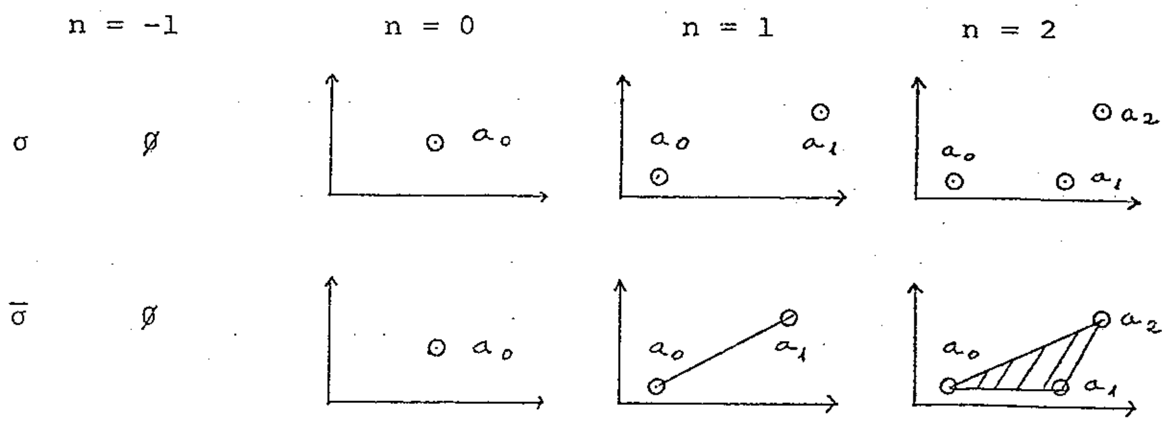
Dado um n-simplex $\sigma = \{a_i\}$ de R^m define-se o invólucro conexo, ou polígono associado, ou suporte geométrico de σ, $\overline{\sigma}$ como sendo a intersecção de todos os subconjuntos conexos de R^m que contenham o conjunto σ.

Proposição II - 6

Usando a mesma notação da definição anterior $\overline{\sigma}$ é, em termo das coordenadas baricêntricas, λ^i, o conjunto:

$$\overline{\sigma} = \{ x \in R^m \mid x = \lambda^i a_i,\ \lambda^i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda^i = 1 \}$$

Damos a seguir alguns exemplos de n-simplexos em R^2, e seus suportes, graficamente representados:



A primeira relação que se define entre dois simplex é a "ser face de " que procura descrever a noção que nos vem intuitivamente da geometria dos sólidos de Euclides.

Definição II - 7

Dados $\sigma = \{a_i\}$, n-simplex de R^m, e $\Theta=\{b_j\}$, p-simplex de R^m, Θ diz-se face de σ sse $\Theta \subset \sigma$. Se Θ é um subconjunto próprio de σ, isto é $\Theta \subset \sigma$ e $\emptyset \neq \Theta \neq \sigma$, Θ diz-se também face própria de σ.

A idéia básica da homologia é usar os simplexos em R^m como blocos para construir estruturas bem mais complicadas. É o que veremos nas definições seguintes.

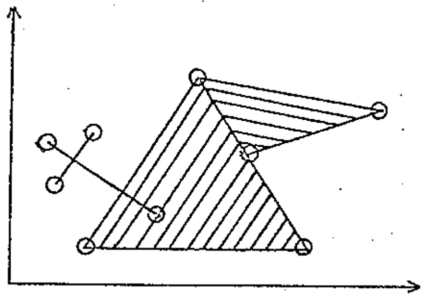
Definição II - 8

Dois simplex σ, Θ, de R^m dizem-se propriamente colados sse:

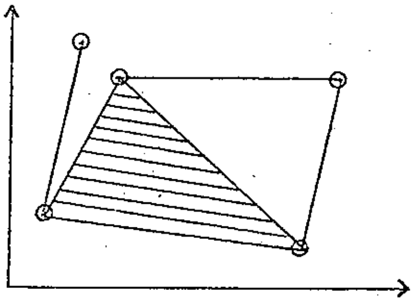
$\overline{\sigma} \cap \overline{\theta} = \emptyset$ ou $\overline{\sigma} \cap \overline{\theta} = \overline{\Omega}$ e Ω é face de σ e de θ .

Exemplifiquemos graficamente, a noção dando exemplos de simplexos, propriamente e são propriamente colados, em R^2.

não propriamente colados



propriamente colados



<u>Definição II - 9</u>

Denomina-se complexo simplicial em R^m a um conjunto $K = \{\sigma_i\}$, de simplexos em R^m, dois a dois propriamente colados.

O conjunto $\overline{K} = \bigcup \overline{\sigma}_i$, com a topologia induzida por R^m denomina-se suporte do complexo K, ou o poliedro associado em R^m.

Define- se ainda a dimensão de K, ou de $\overline{K}$, como sendo a maior das dimensões dos simplexos pertencentes a K.

Por comodidade técnica definem-se alguns complexos associados a um dado complexo K de R^m.

Definição II - 10

Dado $K = \{\sigma_i\}$, complexo simplicial em R^m, define-se:

1) O fecho de K, $C\ell\,(K)$, como sendo o complexo constituido pelo simplex σ_i e todas as suas faces.

2) O n-esqueleto de K, $Sk^n(K)$, como o complexo constituido pela restrição de K aos simplexos σ_i de dimensão $\leq$ n.

Para o desenvolvimento da teoria será necessário levarmos em conta, não só os pontos $\{a_i\}$ que determinam um simplex, mas também a ordem em que estes pontos estão dados.

Definição II - 11

Dado $\sigma = \{a_i\}$ n-simplex de R^m e uma ordenação $< a_0, a_1, \ldots a_n >$ dos pontos de σ, definem-se os simplexos orientados:

$+\sigma$, ou $+ < a_0, \ldots a_n >$, como sendo a classe de equivalência de todas as permutações pares da ordenação $<a_0, a_1 \ldots a_n>$ e

$-\sigma$ ou $- < a_0, \ldots a_n >$, como sendo a classe de equivalência de todas as permutações ímpares da ordenação $<a_0, a_1 \ldots a_n>$.

Definimos ainda o suporte geométrico do n-simplex orientado $+\sigma$, $+\bar{\sigma}$, como sendo o conjunto $\bar{\sigma}$ e a orientação do n-hiperplano de R^m definido por σ, tomado como um espaço vetorial com origem em a_0, definida pela base $< \overrightarrow{a_0a_1}, \ldots \overrightarrow{a_oa_n} >$.

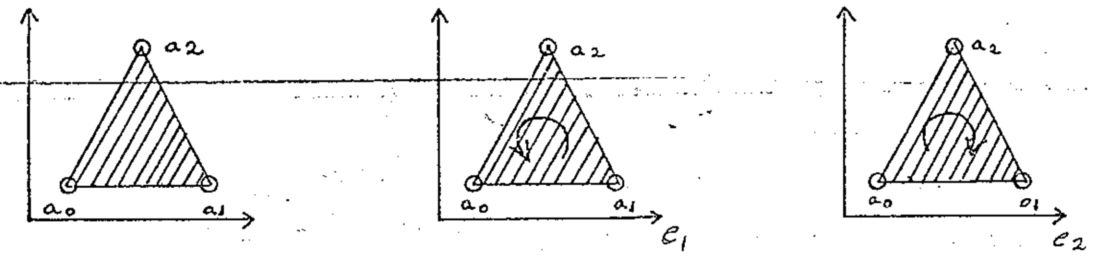
Exemplos

$\sigma = \{a_0, a_1, a_2\} \subset R^2$, com a ordenação $<a_0, a_1, a_2>$

$+\sigma = |<a_0, a_1, a_2>, <a_1, a_2, a_0>, <a_2, a_0, a_1>|$ e

$-\sigma \quad |<a_1, a_0, a_2> <a_0, a_2, a_1> <a_2, a_1, a_0>|$.

$\overline{\sigma}$ $+\overline{\sigma}$ $-\overline{\sigma}$



Até agora definimos uma variedade de conceitos geométricos. Nas definições seguintes montaremos uma estrutura algébrica sobre eles.

<u>Definição II - 12</u>

Dado $K = \{\sigma_i\}$ um complexo simplicial em R^m K diz-se orientado sse a cada um dos seus simplexos foi atribuida uma orientação, $+\sigma_i$.

Sejam $+\Theta$ e $+\Omega$ simplexos de K de dimensão res pectivamente n e n - 1, com as orientações determinadas por uma orientação de K. Define-se o número de incidência de $+\Theta$ e $+\Omega$, $|+\Theta, +\Omega|$ como segue

1) se Ω não for face de Θ, $|\Theta, \Omega| = 0$

2) se Ω for face de Θ,

$\langle a_0, \ldots, a_n \rangle \in +\Theta$ e $\langle a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n \rangle \in +\Omega$,

então $|+\Theta, +\Omega| \equiv (-1)^i$

e ainda por definição

$|+\Theta,+\Omega| = |-\Theta,-\Omega| = -|+\Theta,-\Omega| = -|-\Theta,+\Omega|$

Proposição II - 7

Seja K um complexo orientado, $\{\sigma_i^{\,n}\}$ uma indexação dos n-simplexos de K, Θ um n + 1 simplex e Ω um n - 1 simplex, temos que:

$$\sum_i |+\Theta, +\sigma_i| . |+\sigma_i, +\Omega| = 0$$

Definição II - 13

Seja K um complexo orientado,

$K = \bigcup_j \{\sigma_i^{\,j}\}$, onde $\{\sigma_i^{\,j}\}$ é uma indexação dos simplexos de dimensão j.

Uma função:

C_p: { $+\sigma_i$ ^{p}} { $-\sigma_i$ ^{p}} $\to$ Z, é uma P-cadeia em K sse:

$$C_p\ (+\sigma_i) = -\ C_p\ (-\sigma_i)$$

Se $C_p(+\sigma_i) = \alpha^i$ escrevemos formalmente a cadeia como:

$$C_p = \alpha^i\ \sigma_i$$

O conjunto C_p, das p-cadeias em um complexo simplicial orientado K, dotado da soma usual de funções , isto é

se $C_p = \alpha^i\ \sigma_i$ e $d_p = \beta^i\ \sigma_i \to C_p + d_p = (\alpha^i + \beta^i)\sigma_i$,

é um grupo.

Proposição II - 8

Com a mesma notação da definição anterior afirmamos que o grupo C_p, das p-cadeias em um complexo orientado K, é isomorfo a soma direta de ℓ cópias de Z, onde ℓ é o número de simplexos de dimensão p em K.

Definição II - 14

Define-se o operador bordo de grau p, como uma aplicação:

$\partial_p : C_p \to C_{p-1}$, onde

dado $c_p \in C_p$, $c_p = \sum_i \alpha^i \sigma_i^p$ têm-se

$$\partial_p(c_p) = \partial(\sum_i \alpha^i \sigma_i^p) = \sum_i \alpha^i \sum |\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}| \sigma_j^{p-1} .$$

Uma p-cadeia $z_p \in C_p$ diz-se um ciclo sse $\partial_p(z_p) = 0$.

Uma p-cadeia, $z_p \in C_p$ diz-se um bordo sse :

$$\exists / c_{p+1} \in C_{p+1} \mid \partial_{p+1} (c_{p+1}) = b_p .$$

Examinando cuidadosamente a proposição II - 7 e a definição II - 14 podemos chegar as seguintes conclusões:

~~Proposição II - 9~~

Dado K um complexo simplicial orientado, C_p o gurpo dos p-cadeias em K, $B_p \subset C_p$ o conjunto dos p-bordos em K, $Z_p \subset C_p$ o conjunto dos p-ciclos em K.

1) Z_p é um subgrupo de C_p

2) A composição de dois operadores de bordo,

$\partial_p \circ \partial_{p-1} : C_p \to C_{p-2}$

é o homomorfismo trivial

3) B_p é um subgrupo de Z_p e de C_p.

Estamos agora em condições de enunciar a principal definição da secção.

Definição II - 15

Dado K um complexo simplicial orientado, C_p o grupo de p-cadeias em K, Z_p o grupo dos p-ciclos em K e B_p o grupo dos p-bordos em K define-se H_p, o grupo de homologia de K como o grupo quociente

$$H_p = Z_p / B_p$$

e a relação de equivalência $\sim$, homologia, é dado por

$$\forall\, z_1, z_2 \in Z_p, \quad z_1 \sim z_2 \leftrightarrow (z_1 - z_2) \in B_p$$

($z_i \sim z_2$ lê-se z_1 é homólogo a z_2).

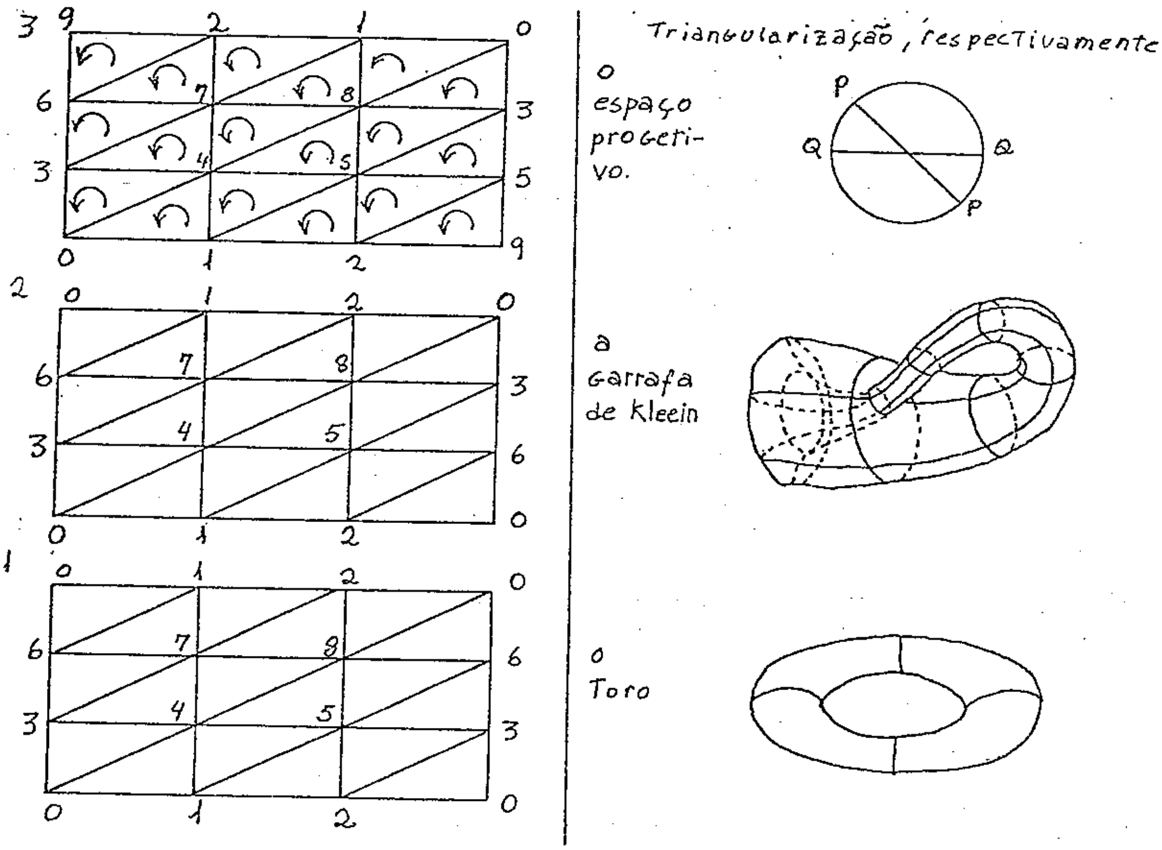
Antes de dar alguns exemplos ilustrativos definimos uma noção que faz a conexão entre a topologia usual e os conceitos aqui desenvolvidos.

Definição II - 16

Dado T, um espaço topológico, K, um complexo simplicial em R^m, diz-se triangularização de T sse o poliedro associado, $\overline{K}$ é homeomorfo a T.

Exemplos

Estudemos 3 exemplos de complexos simpliciais em R^2, cuja respresentação esquemática é:



Para os três exemplos são os seguintes, os grupos de homologia.

	H_2	B_2	Z_2	H_1	H_0
ex 3	0	0	0	Z_2	Z
ex 2	0	0	0	$Z \oplus Z_2$	Z
ex 1	Z	0	Z	$Z \oplus Z$	Z

O grupo H_0 é sempre a soma de ℓ cópias de Z, onde ℓ é o número de componentes conexos de T.

O grupo H_2 é facilmente encontrável, uma vez que $B_2 = 0$, por não existirem 3-simplexos, e Z_2 ser Z ou 0, dependendo de ser ou não, $\partial_2 f = 0$ onde $f = \sum_{i=1}^{18} 1\ (+\sigma_i^2)$.

O grupo H_1 é de cálculo bastante trabalhoso. Para uma idéia intuitiva do que esta acontecendo, vejam que:

No primeiro exemplo, todo ciclo é homólogo a uma cadeia de forma $e = \alpha\ C + \beta\ d$, onde $C = 1 <a_0,a_1> + 1 <a_1,a_2> + 1<a_2,a_0>$, $d = 1 <a_0,a_3> + 1 <a_3,a_6> + 1 <a_6,a_0>$ e $\alpha, \beta \in Z$ e se $\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0 \rightarrow \partial(e) \neq 0$.

No segundo exemplo temos ainda que todo ciclo é homólogo a $e = \alpha\ C + \beta\ d$. O fato de, para β par termos $\beta\ d \sim -2\ c$, explica o aparecimento do grupo ciclico Z_2.

No terceiro exemplo constatamos que todo ciclo é homólogo a um ciclo da forma $e = \alpha(1 < a_0a_1 > + 1 < a_1a_2 > + 1 < a_2a_9 > + 1 < a_9a_6 > + 1 < a_6a_3 > + 1 < a_3a_0 >)$ e se α é par então $e \sim 0$.

Nesta secção discutiremos os tópicos mais importantes e obteremos os resultados mais importantes, no contexto da dissertação, do capítulo.

O resultado final da secção é o teorema da invariância dimensional. Este teorema, que em essência afirma que R^n não é homeomorfo a R^m se $n \neq m$, embora muito intuitivo é longe de ser trivial. Basta dizer que só foi demonstrado pela primeira vez em 1911, por L.Brouwer .

Para chegarmos ao teorema da invariância dimensional devemos antes provar o teorema da aproximação sim

O grupo H_1 é de cálculo bastante trabalhoso. Para uma idéia intuitiva do que esta acontecendo, vejam que:

No primeiro exemplo, todo ciclo é homólogo a uma cadeia de forma $e = \alpha C + \beta d$, onde $C = 1 <a_0, a_1> + 1 <a_1, a_2> + 1 <a_2, a_0>$, $d = 1 <a_0, a_3> + 1 <a_3, a_6> + 1 <a_6, a_0>$ e $\alpha, \beta \in Z$ e se $\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0 \to \partial (e) \neq 0$.

No segundo exemplo temos ainda que todo ciclo é homólogo a $e = \alpha C + \beta d$. O fato de, para β par termos $\beta d \sim - 2 c$, explica o aparecimento do grupo cíclico Z_2.

No terceiro exemplo constatamos que todo ciclo é homólogo a um ciclo da forma $e = \alpha(1 < a_0 a_1 > + 1 < a_1 a_2 > + 1 < a_2 a_9 > + 1 < a_9 a_6 > + 1 < a_6 a_3 > + 1 < a_3 a_0 >)$ e se α é par então $e \sim 0$.

Nesta secção discutiremos os tópicos mais importantes e obteremos os resultados mais importantes, no contexto da dissertação, do capítulo.

O resultado final da secção é o teorema da invariância dimensional. Este teorema, que em essência afirma que R^n não é homeomorfo a R^m se $n \neq m$, embora muito intuitivo é longe de ser trivial. Basta dizer que só foi demonstrado pela primeira vez em 1911, por L.Brouwer .

Para chegarmos ao teorema da invariância dimensional devemos antes provar o teorema da aproximação sim plicial. Embora o teorema da aproximação simplicial não tenha interesse imediato no seguimento da dissertação, será provado com algum detalhe, o que nos permitirá introduzir, alguns conceitos novos, como o de subdivisão baricêntrica.

O conceito de subdivisão baricêntrica será retomado no capítulo sobre integração e nos permitirá entender, embora a demonstração não seja dada, o porque o cálculo de uma integral é invariante em relação a parametrização (veja Cap. IV).

Ao longo de toda esta secção estaremos discutindo aplicações de um simplex, ou de um suporte, em outro. Caracterizemos pois estas aplicações de acordo com nossos interesses.

Definição II - 17

Sejam K,L p-complexos simpliciais, Uma função f, dos vértices de K nos vértices de L será dita uma aplicação simplicial sse para qualquer n-simplex $\sigma^n = \{ a_0 \dots a_n \}$ de K, $\{f(a_0) \dots f(a_n)\} \subset \Theta$ onde Θ^n é um n-simplex de L.

Se os vértices $f(a_0), \dots, f(a_n)$ forem todos distintos o simplex Θ^n é dito imagem de σ^n por f, $f(\sigma^n)$, caso contrário diz-se que f colapsa o simplex σ^n.

Seja $< \phi_0 \dots \phi_p >$ uma p-upla ordenada de homomorfismos

$$\phi_p : C_p (K) \to C_p (L)$$

$< \phi_0 \dots \phi_p >$ será dito um mapa de cadeias sse verificar -

- se a identidade

$$\partial_n \circ \phi_n = \phi_{n-1} \circ \partial_n \quad , \forall n | 0 < n \leq p \ .$$

Proposição II - 10

Nas mesmas condições da definição anterior temos que:

1) O mapa de cadeias $< \phi_0 , \ldots , \phi_p >$ induz, em todas as dimensões $0 \leq n \leq p$, homomorfismos.

   $\phi_n^* : H_n (K) \to H_n (L)$, definido por

   $\phi_n^* (|z|) = | \phi_n (z) |$, $\forall$ z, n-ciclo de K.

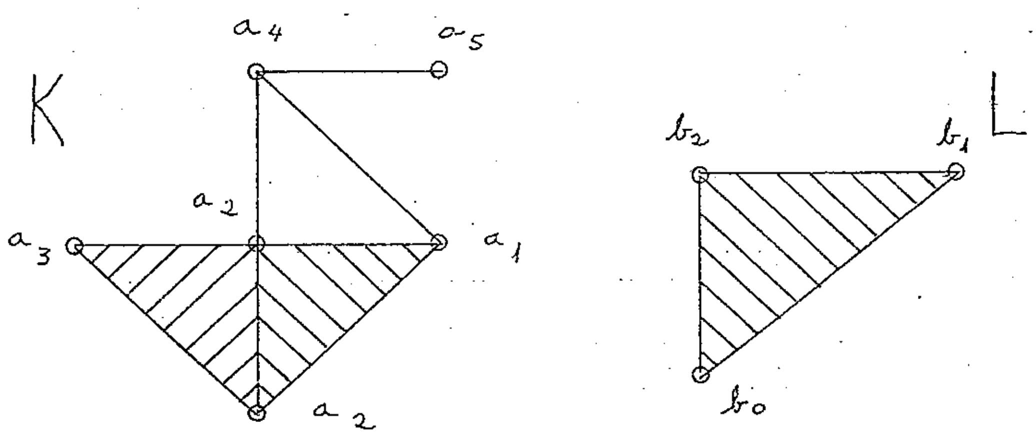
2) Para qualquer f, mapa simplicial de K em L, os homomorfismos $< \phi_0 , \ldots , \phi_p >$ induzido por f da maneira abaixo descrita, é um mapa de cadeias.

   $\phi_n : C_n (K) \to C_n (L)$ é dado por

   $\phi_n (\alpha^i \sigma_i^n) = \tilde{\alpha}^i f (\sigma_i^n)$, onde $\tilde{\alpha}^i = 0$ se f colapsa σ_i^n , e $\tilde{\alpha}^i = \alpha^i$ caso contrário.

Exemplo

Sejam K e L dois 2-complexos como abaixo representados.



Consideremos que $C\ell\ (K) = K$ e $C\ell\ (L) = L$ e seja f definido por

a_i	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$f(a_i)$	b_0	b_1	b_2	b_1	b_0	b_0

O mapa f é um mapa simplicial. Seja

$$\ell = (+2\ \langle a_0 a_1\rangle +2\ \langle a_1 a_2\rangle +2\ \langle a_2 a_4\rangle +3\ \langle a_4 a_5\rangle)$$

$$\phi_1(\ell) = 2(+\langle b_0 b_1\rangle + \langle b_1 b_2\rangle + \langle b_2 b_0\rangle)$$

$$\partial_1(\ell) = +2\ \langle a_0\rangle + \langle a_4\rangle - 3\langle a_5\rangle\ , \qquad \text{e}$$

$$\partial_1(\phi_1(\ell) = 0 = \phi_0\ (\partial_1(\ell)).$$

Os espaços que estamos estudando são os suportes $\bar{K}$ e $\bar{L}$ dos complexos K e L. Procuraremos agora, de alguma maneira, a partir de um mapa simplicial f induzir uma função contínua $\tilde{f} : \overline{K} \to \overline{L}$. Definir e estudar tais funções é o que agora faremos.

Definição II - 18

Dados K e L, complexos simpliciais e f, um mapa simplicial, dos vértices de K nos vértices de L, define-se a extensão de de f, $\tilde{f} : \overline{K} \to \overline{L}$ como sendo:

dado $\sigma = \langle a_0 \ldots a_n \rangle \in K$ e

$x \in \overline{\sigma}$,onde $x = \lambda^i a_i$, com $\lambda^i \geq 0$ e $\sum_i \lambda^i = 1$

então $\tilde{f}(x) = \lambda^i f(a_i) \in \overline{L}$.

~~Proposição II - 11~~

A extensão de um mapa simplicial é uma função contínua de $\overline{K}$ em $\overline{L}$.

Definição II - 19

Dado K p-complexo simplicial em R^m define-se

1) A estrela de um vértice a de K, St(a), como sendo o complexo formado por todos os simplexos de K de que a seja vértice.

2) A estrela aberta de um vértice a de K, Ost (a) como o subconjunto de K dado por:

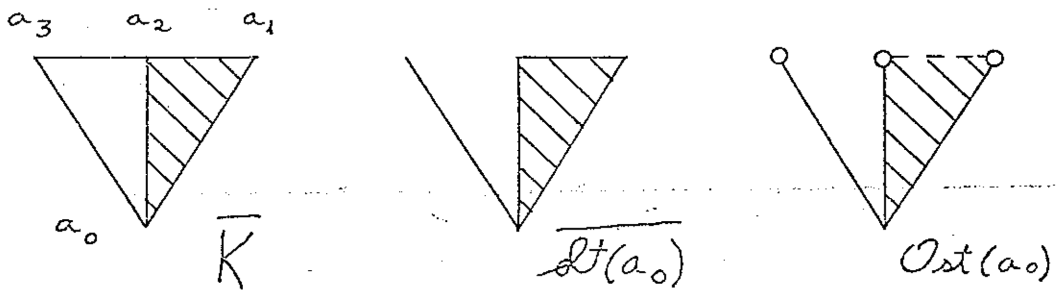
$Ost\ (a) \equiv Int\ \overline{\sigma}_i$, $\sigma_i \ \varepsilon \ St\ (a)$ e

$Int\ \overline{\sigma}_i$, o interior do polígono $\overline{\sigma}_i$ é o subconjunto de $\overline{\sigma}_i$, é definido, sendo $\sigma_i = \{a_j\}$, por

$Int\ \overline{\sigma}_i = \{x \ \varepsilon \ R^m \mid x = \lambda^j a_j \ , \ \lambda^j > 0 \ \text{ e } \sum_j \lambda^j = 1\}$

Exemplo

Representamos graficamente um complexo K e a estrela aberta de um vértice de K.



Proposição II - 12

Seja K um p-complexo simplicial em R^m seja $\{a_0 \ldots a_n\}$ um conjunto de vértices de simplexos de K. Afirmamos que existe um simplex σ $\{a_0 \ldots a_n\} \ \varepsilon \ Sk^n(C\ell(K))$ sse

$\bigcap_i Ost\ (a_i) \neq 0$

A idéia sobre o qual trabalharemos a seguir é a de aproximar uma função $F: \overline{K} \to \overline{L}$ pela extensão $\tilde{f}$, um mapa simplicial $f: K \to L$.

Definição II - 20

Dado K, L complexos em R^m e F: $\overline{K} \to \overline{L}$, K e L dizem-se estrelarmente relacionados por F sse existir uma função S, dos vértices de K nos vértices de L, tal que

$$\forall a,\ F(\text{Ost}(a)) \subset \text{Ost}(S(a)),$$

a vértice em K, S (a) vértice de L.

Além disto, dado f: K → L, mapa simplicial f diz-se uma aproximação simplicial de F sse $\tilde{f}$ é homotópico a F.

Proposição II - 13

Nas mesmas condições da definição anterior S é uma aproximação simplicial de F.

Para provarmos a proposição basta lembrar que pelas proposições II - 12 , dado $\sigma = \{a_0 \ldots a_n\}$

$\bigcap_i \text{Ost}(a_i) \neq 0$, e portanto usando que $\overline{K}$ e $\overline{L}$ são estrelarmente relacionados por F

$$\bigcap_i \text{Ost}(S(a_i)) \supset \bigcap_i F(\text{Ost}(a_i)) \supset F(\ _i\ \text{Ost}(a_i)) \neq \emptyset .$$

Usando novamente a proposição II - 12 temos que $\{ S(a_0), \ldots S(a_n) \}$ é um simplex de L, e portanto S é um mapa simplicial.

Por outro lado

$H(x, t) = (1 - t) F(x) + t \tilde{S}(x)$, $x \in \bar{K}$ é uma homotopia entre F e $\tilde{S}$.

Esta situação é muito interessante pois, lembrando da proposição II - 10 , a partir de F temos os homomorfismos $S_q^* : H_q(K) \to H_q(L)$.

Antes de podermos usar com proveito estas sequências, precisamos tornar a situação suficientemente geral. Para tanto introduziremos o conceito de subdivisão baricêntrica.

Definição II - 21

Dado $\sigma^n = \{a_0, \ldots, a_n\}$ simplex em R^m, denomina-se baricentro de σ^n, ao ponto

$$\dot{\sigma}^n = \lambda^i a_i , \qquad \lambda^i = \frac{1}{n+1}$$

Seja K um p-complexo simplicial tal que

$$K = \bigcup_{j=0}^{p} \{ \sigma_i^j \} \quad \text{e} \quad K = C\ell\,(K) , \quad \text{onde}$$

$\{ \sigma_i^j \}$ é uma indexação dos j-simplexos de K.

Definimos a primeira subdivisão baricêntrica de K como sendo o complexo K^1 cujos elementos são para qualquer $0 \leq n \leq p$, da forma

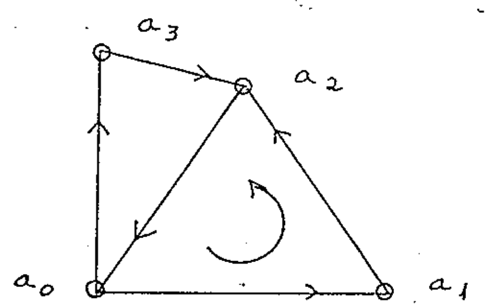
$\Theta_i^n = \{ \dot{\sigma}_{i_0}^0 , \dot{\sigma}_{i_1}^1 , \ldots , \dot{\sigma}_{i_n}^n \}$, onde os simplexos $\sigma_{i_0}^0 , \ldots \sigma_{i_k}^k$ são faces do simplex $\sigma_{i_{k+1}}^{k+1}$.

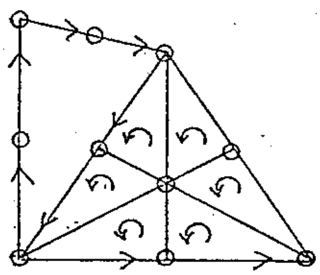
Se a K for dado alguma orientação, a orientação induzida em K^1 é por definição aquela que a cada simplex Θ^n de K^1 associa a orientação

$$\Big(\prod_{k=0}^{n-1} \big| \sigma_{i_k}^k , \sigma_{i_{k+1}}^{k+1} \big| \Big) < \dot{\sigma}_{i_0}^0 , \ldots , \dot{\sigma}_{i_n}^n >$$

Exemplo

Representamos graficamente um complexo K e sua primeira subdivisão baricêntrica.





Definição II - 22

Dado K um complexo simplicial define-se a enésima subdivisão baricêntrica de K, K^n, indutivamente. Diz-se enésima subdivisão baricêntrica de K, a primeira subdivisão baricêntrica do fecho da (n-1)ésima subdivisão baricêntrica de K. Isto é

$K^n = (C\ell (K^{n-1}))^1$

Definição II - 23

Denomina-se malha de um complexo simplicial K ao maior dos diâmetros dos supores de seus simplexos. Ou seja

$$\text{mesh } (K) = \max \{\text{diam } \overline{\sigma}_i \text{ , } \sigma_i \in K \}$$

onde por diâmetro de um conjunto $W \subset R^m$ entendemos

$$\text{diam}(W) = \max \{ \| x - y \| \text{ , } x, y \in W \}.$$

Proposição II - 14

A malha da enésima subdivisão baricêntrica de um p-complexo K, é uma função monotonamente decrescente em n, pois vale a relação

$$\text{mesh } (K^n) \leq \frac{p}{p+1} \text{ mesh } (K^{n-1})$$

Enunciaremos agora, sem demonstrações, o teorema da aproximação simplicial e, a seguir demonstraremos o teorema da invariância de domínio.

Teorema II - 1 (Teorema da aproximação simplicial)

Dados K, L, M p-complexos simpliciais e $F: \overline{K} \to \overline{L}$, $\tau: \overline{L} \to \overline{M}$, contínuas, temos que

1) Para algum n, a enésima subdivisão baricêntrica de K , K^n, e L estarão estrelarmente relacionados por F.

2) Para qualquer q, $0 \leq q \leq p$

$H_q(K^n)$ independem de n.

3) Se S e R forem duas aproximações simpliciais de $F: \overline{K} \to \overline{L}$ os homorfismos induzidos

$S_q^*: H_q(K) \to H_q(L)$ e

$R_q^*: H_q(K) \to H_q(L)$ coincidem.

4) Se S e R forem aproximações simpliciais, respectivamente, de $F: \overline{K} \to \overline{L}$ e $F: \overline{K^n} \to L$ os homeomorfismos

$S_q^*: H_q(K) \to H_q(L)$ e

$R_q^*: H_q(K^n) \to H_q(L)$, coincidem.

Portanto dada a função $F: T \to U$, espaços topológicos onde K é uma triangularização de T e L é uma triangularização de U, temos os homomorfismos F_q^*

$F_q^*: H_q(K) \to H_q(L)$

univocamente determinado por qualquer aproximação simplicial de qualquer subdivisão baricentrica de K em L.

Temos ainda que:

5) $(G \circ F)^*_q = G^*_q \circ F^*_q$.

Teorema II - 2 (Teorema da invariância de domínio)

Os espaços R^m e R^n são homeomorfos sse m=n.

Quando n=m o resultado é banal. Para n≠m usaremos o fato de que S^n é a compactificação, ou compactificação de Alexandroif, de R^n *. Basta pois provar que S^n e S^m não são homeomorfos de n≠ m.

Suponhamos o contrário, isto é, que exista um homeomorfismo F: $S^n \to S^m$. Então pelo teorema da aproximação simplicial, se K é uma triangularização de S^n e L uma triangularização de S^m, estão definidos os isomorfismos.

$F^*_q : H_q(K) \to H_q(L)$ e

$(F^{-1})^*_q : H_q(L) \to H_q(K)$

Nós observamos que como $F \circ F^{-1} = I$, a identidade então

$(F \circ F^{-1})^*_q = I^*_q = F^*_q \circ (F^{-1})^*_q$, e

$(F \circ F^{-1})^*_q = I^*_q = (F^{-1})^*_q \circ F^*_q$.

Portanto F^*_q é um isomorfismo.

Utilizar-se-á como um lema ** a demonstração que o grupo $H_q(M)$ onde M é uma triangularização da esfera S^m é dada por

* Veja por exemplo (Dungundji,66)
** Veja por exemplo (Hoking,67)

$$H_q(M) \begin{cases} \text{o grupo trivial se } 0 < q < m \\ \text{Isomorfo a } Z \text{ se } q = m \text{ ou } q = 0 \end{cases}$$

fica evidente o absurdo e demonstrado o teorema.

_____ // _____

Nesta secção, que finaliza o capítulo, daremos alguns elementos de homologia singular.

Embora a homologia singular seja uma outra teoria de homologia possível, não a estudaremos enquanto técnica de topologia algébrica* , mas apenas o necessário para a teoria de integração em variedades.

Definição II - 24

Definimos um n-simplex singular orientado sobre T como sendo a classe de equivalência, $|(+\sigma, f)|$ onde

1) $+\sigma$ é um n-simplex orientado em R^n.

2) f é uma função contínua de $\overline{\sigma}$ no espaço topológico T
   $f: \overline{\sigma} \to T$

3) A relação de equivalência é dado por
   $(\sigma, f) \sim (\theta, g)$ sse:
   para coordenadas baricêntricas, λ^i, de $+\sigma = +< a_0 \ldots a_n >$ e $+\theta = +< b_0 \ldots b_n >$
   $f(\lambda^i a_i) = g(\lambda^i b_i)$.

Usualmente escrevemos um simplex singular orientado $|(+\sigma, g)|$, na forma standard, $|(\pm S^n, f)|$, onde

* Veja (Greemberg, 67)

$S^n = + < a_0, \ldots, a_n >$ e

$a_0 = (0, \ldots, o)$

$a_1 = (1, 0, \ldots , 0)$

$a_n = (0, \ldots, o, 1)$

<u>Definição II - 25</u>

Definimos as faces de um n-simplex singular , $| (+\sigma^n, f) |$, como sendo os (n - 1)-simplexos singulares da forma

$| (+\sigma_i^{n-1}, f |_{\overline{\sigma}_i^{n-1}}) |$, onde

$\{ \sigma_i^{n-1} \}$ são as faces de σ^n.

<u>Definição II - 26</u>

Dado $| (+\sigma^n, f) |$ 1-simplex singular orientado e $| (+\Theta, g) |$ um (n - 1)-simplex singular orientado, definimos o número de incidência.

$| \ | (+\sigma, f) |, | +\Theta, g | \ | \equiv |+\sigma, +\Theta |$.

Em completa analogia ao caso singular, definimos também cadeias e o operador bordo.

Definição II - 27

Dado $K = \{ \sigma_i^j \}$ complexo simplicial em R^n e um conjunto $\mathcal{K} = \{ | (+\sigma_i^j, f_i^j) | \}$, de simplexos singulares orientados em um espaço topológico T; dizemos que $\mathcal{K}$ é um complexo singular orientado.

Definimos ainda o grupo das cadeias sobre ., com o grupo sobre o conjunto das somas formais:

$C_j(\mathcal{K}) = \{ C_j \ (\mathcal{K}) \}$, onde

$C_j(\mathcal{K})$ é da forma $\sum_i \alpha^i \ |(+\sigma_i^j, f_i^j)|$

onde os detalhes segume perfeitamente os da definição de cadeia simplicial.

Definimos também o operador bordo

$\partial_p : C_p \to C_{p-1}$ dado por

$$\partial_p \left(\sum_i \alpha^i \ | (+\sigma_i^p , f_i^p) | \right) \equiv \sum_{i,j} |+\sigma_i^p , \sigma_j^{p-1} | \ \alpha^i |(\sigma_j^{p-1}, f_j^{p-1})|$$

As definições de cilco, bordo e grupo de homologia seguem exatamente como od do caso simplicial.

Retomaremos novamente estes conceitos no capítulo sobre integração em variedades.

CAPÍTULO III

Neste terceiro capítulo da dissertação são introduzidos os principais conceitos de geometria diferencial.

A primeira secção, de caráter introdutório, é um resumo de cálculo no R^n com atenção especial ao teorema da função inversa. Esta secção vem fornecer uma referência abreviada da matéria, de modo que a "continuidade lógica da dissertação não seja quebrada, e também estabelecer as notações e nomenclaturas utilizadas.

A segunda e a terceira secções são o cerne do capítulo. Nelas são apresentados os conceitos de variedade topológica, estrutura diferencial, vetor e espaço tangente. Procura-se, na medida do possível, apresentar estes conceitos de maneira rigorosa e detalhada.

Na quarta secção, curvas e fibrados,é introduzido o conceito de curva, rediscutindo-se o conceito de vetor, formalizando a noção de fibrados tangentes e discutindo o conceito de fibrados tensoriais.

A última secção do capítulo é um pouco mais técnica que as precedentes e se propõe a apresentar os conceitos de ação de um grupo numa variedade, grupo de Lie, derivados e Lie e álgebra de Lie.

Nesta secção trataremos rapidamente os principais teoremas do cálculo de mais de uma variável, a saber, o teorema da função inversa e o teorema da função implícita.

A principal motivação de termos introduzido esta secção é a de fornecer um resumo de um assunto a que voltaremos constantemente ao longo de toda a dissertação.

Também historicamente as relações entre os temas aqui abordados e a geometria diferencial são importantes e marcam até hoje aquilo que entendemos pela palavra "geometria diferencial".*

A noção básica sobre a qual trabalharemos é a de função diferencial.

Definição III - 1

Uma função $F: R^n \to R^m$ diz-se diferenciável em um ponto $x \in R^n$ sse, para um aberto U de $R^n \mid 0 \in U$, houver um operador $T \in L(R^n, R^m)$ tal que para $\Delta \in U$

$$F(x + \Delta) = F(x) + T(\Delta) + rest(\Delta), \quad \text{e}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{|rest(\Delta)|}{(\Delta)} = 0.$$

Neste caso o operador T diz-se a aplicação di

Veja (Spivak, 75) volume II, cap. II e III.

ferencial de F em x, que notaremos F'_x ou F'.

Proposição III - 1

Se uma função $F: R^n - R^m$ é diferenciável num certo ponto, então a diferencial neste ponto é única.

Esta proposição deduz-se rapidamente, por absurdo, a partir da proposição I - do capítulo I.

Definição III - 2

Uma função $F : R^n \to R^m$ diz-se continuamente diferenciável em um aberto $U \subset R^n$ sse F for diferenciável em todos os pontos de U e

$$\lim_{x \to x_0} \| F'_x - F'_{x_0} \| = 0 \qquad \forall x_0 \in U.$$

Proposição III - 2

Dadas funções F, G e H, $H : R^n \to R^k$, $G: R^k \to R^m$ e $F = G \circ H$ se G e H forem diferenciáves em, respectivamente, x e H(x) então

$$F'_x = G'_{H(x)} \cdot H'_x \quad .$$

Definição III - 3

Dada a função $F: R^n \to R^m$, tome-se F escrita nas coordenadas canonicas.

$$F(x^1, \ldots, x^n) = (F^1(x), \ldots, F^m(x))$$

onde $F^i(x) = \pi^i \circ F$, π^i o operador de projeção.

Definimos a derivada parcial de índices i, j no ponto $x_0 \in R^n$ por

$$\left.\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right|_{x_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F^i(x_0^1, \ldots x_0^{j-1}, x_0^j + \varepsilon, x_0^{j+1}, \ldots x_0^n) - F^i(x_0)}{\varepsilon}$$

Usam-se também as notações

$$\left.\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right|_{x_0} = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x_0) = \partial_j \, . \, F^i(x_0) = D_j \, . \, F^i(x_0)$$

onde habitualmente se omite a referência ao ponto de derivação, x_0, sempre que for possível para não sobrecarregar a notação.

Definição III - 4

Uma função $F : R^n \to R^m$ é dita de classe:

C^0, sse for contínua.

C^1, sse existirem todas as suas derivadas parciais.

Denominamos, as derivadas parciais das derivadas parciais de uma função F, de segundas derivadas parciais de F e assim por diante. F é ainda dita:

C^r, sse for de classe C^{r-1} e existirem todos os r-ésimos derivadas parciais.

C^∞, sse F é de classe C^r, $\forall r \in N$.

Proposição III - 3

Uma função $F : R^n \to R^m$ é continuamente diferenciável sse suas primeiras derivadas parciais forem contínuas.

Demonstração :

1) $\to$

Seja $F : R^n \to R^m$ diferenciável em x_o, e

$$\partial_i F^j \Big|_{x_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(F^j(x_0 + \varepsilon e_i) - F^j(x_0)}{\varepsilon}$$

onde $e_i \in R^n$ e $\pi^j(e_i) = \delta^j_i$.

Sendo F'_{x_0} a aplicação diferencial vemos que

$\partial_i F^j \Big|_{x_0} = F'_{x_0}(e_i)$, donde conclue-se que

se F'_{x_0} é uma aplicação contínua também o serão as funções $\partial_i F^j \Big|_{x_0}$.

2) $\leftarrow$

Analisemos inicialmente o caso de $F : R^n \to R$, C^1.

$$\forall | x \in R^n \ , \ \forall | \varepsilon \in R_t^* \ , \qquad \exists | \delta \in R_t^* \qquad |$$

$$\forall | y \in R^n \ , \qquad | \ y - x \ | < \delta \to | \ (\partial_i F \Big|_y - \partial_i F \Big|_x) \ | < \frac{\varepsilon}{n}$$

Seja $\Delta = \Delta^i e_i$, $\quad e_i = (0 \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \ldots, \quad i \quad \ldots n$

tal que $|\Delta| < \delta$

façamos $\nabla^j = \Delta^k e_k$, $\quad k = 1 \ldots j \quad$ e $\quad \nabla^o = 0$

temos que

$$F \ (x + \Delta) - F(x) = \sum_{j=1}^{n} \ (F \ (x - \nabla^j) - F \ (x + \nabla^{j-1})) \ .$$

O teorema do valor médio nos assegura que

$$F \ (\ x + \nabla^j \ ) - F \ (x + \nabla^{j-1}) =$$

$$= \Delta^j \ (\partial_j F) \ \Big|_{x \ + \ \nabla^{j-1} \ + \ \theta_j \Delta^j e_j} \qquad \text{(nenhuma somatória)} \ .$$

para algum $\theta_j \ \varepsilon \ | \ 0, \ 1 \ |$,

então $| \ F(x + \nabla^j) - F(x + \nabla^{j-1}) - \Delta^j \ (\partial_i \ F \Big|_x) \ | \leq \dfrac{\varepsilon}{n}$

e $\quad | \ F \ (x + \Delta) - F(x) - \Delta^j \ \partial_j \ F \Big|_x \ | \leq \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \ |\Delta^j| \ \varepsilon \leq |\Delta| \ \varepsilon.$

Está demonstrada a proposição no caso de $F : R^n \to R^m$ com $m = 1$. Para $m \neq 1$ repete-se o mesmo argumento para cada uma das composições $F^i = \pi^i \ 0 \ F$, e F'_x será expressa, na forma matricial, por

$$F'_x(\Delta) = \begin{bmatrix} \partial_1 F^1_x & \cdots & \partial_1 F^m_x \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_n F^1_x & \cdots & \partial_n F^m_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ \vdots \\ \Delta^n \end{bmatrix}$$

Q.E.D.

Devemos demonstrar ainda uma proposição auxiliar antes do teorema da função inversa.

Proposição III - 4

Dada $F : R \to R^m$, contínua em $| t_0, t'_0 |$ afirmamos que

$$\exists\ x \in | t_0, t'_0 | \quad | \quad |F(t_0) - F(t'_0)| \leq \| F'_x \| \ (t'_0 - t_0).$$

Demonstração:

Seja $c = \dfrac{t'_0 - t_0}{3}$, $\qquad D = F(t'_0) - F(t_0)$,

e $d(t) = F(t + c) - F(t), \ \forall\ t \in | t_0, t_0 + 2c |$

tem-se que

$$|D| = |\ d(t_0) + d(t_0 + c) + d\ (t_0 + 2c)\ | \leq |\ d(t_0)\ | +$$

$$+ |\ d(t_0 + c)\ | + |\ d(t_0 + 2c)$$

portanto $\exists\ t_1 \in |\ t_0,\ t_0 + 2c\ |\ \ |\ \ d(t) \geq |D|\ /\ 3.$

Seja $t_1' = t_1 + c$, tem- se um novo intervalo,

$|\ t_1,\ t_1'\ |$, com $t_1' - t_1 = (\ t_0' - t_0\ )\ /\ 3$ e

$$|\ F(t_1') - F\ (t_1)\ | = |\ F(t_1 + c) - F\ (t_1)\ | = |\ d(t_1)\ | \geq |D|\ /\ 3$$

Repetindo-se n-vezes o mesmo raciocínio construimos um intervalo

$I_n = |\ t_n,\ t_n'\ |$, com $t_n' - t_n = (t_0' - t_0)\ /\ 3^n$,

como $I_n \subset I_{n-1}$ e $|\ F(t_n') - F(t_n)\ | \geq |D|\ /\ 3^n$,

$$\frac{|\ F(t_n') - F(t_n)\ |}{t_n' - t_n} \geq \frac{|\ F(t_0') - F(t_0)\ |}{t_0' - t_0} .$$

Seja $x_n \in | t_n, t'_n |$. A sequência dos x_n tem um ponto de acumulação, x. No limite o primeiro membro é precisamente $| F'_x |$ donde segue a proposição.

Podemos agora enunciar o teorema central da secção , o teorema da função inversa.

Teorema III - 1

Dada uma função $F : R^n \to R^n$, continuamente diferencial num aberto $U \subset R^n$, se a aplicação F'_{x_0} é inversível num ponto $x_0 \in U$, então existe a função F^{-1}, inversa de F, definida num aberto $V \ni F(x_0)$. Podemos ainda escolher V de forma que F^{-1} seja continuamente diferenciável em $F^{-1}(V) = U'$, aberto de R^n.

Temos ainda que

$$(F'_x)^{-1} = (F^{-1})_{F(x)} .$$

Demonstração:

Seja $\alpha = 1 / 4 \, \| (F'_{x_0})^{-1} \|$.

Pela definição de de continuamente diferencial

$$\exists \, \delta \; | \; \| F'_x - F'_{x_0} \| < 2\alpha \quad , \quad \forall \, x \in B_{x_0} (\delta), \text{ onde}$$

$B_{x_0}(\delta) = \{ x \mid (x - x_0) \mid < \delta \}$, a bola aberta de raio δ.

Seja $x \in B_{x_0}(\delta)$ e $\Delta \mid |\Delta| < \delta - | x - x_0 |$, de modo que,

$(x + \Delta) \in B_{x_0}(\delta)$.

Definindo-se

$f(\varepsilon) = F(x + \varepsilon\Delta) - \varepsilon F'_{x_0}(\Delta)$, $\varepsilon \in | 0, 1 |$, tem-se

$$|f'_\varepsilon| = | F'_{x_0 + \varepsilon\Delta}(\Delta) - F'_{x_0}(\Delta) | \le 2\alpha |\Delta| =$$

$$= 2\alpha | F'^{-1}_{x_0} F'_{x_0}(\Delta) | \le 2\alpha \| F'^{-1}_{x_0} \| . | F_{x_0}(\Delta) | = \frac{1}{2} | F'_{x_0}(\Delta) |.$$

Usando a última proposição tem-se que

$$|f(1) - f(0)| = |F(x + \Delta) - F(x) - F'_{x_0}(\Delta)| \le \frac{1}{2} | F'_{x_0}(\Delta) | \quad (1)$$

e assim

$$|F(x + \Delta) - F(x)| \ge \frac{1}{2} | F'_{x_0}(\Delta) | \ge 2\alpha |\Delta| \quad (2)$$

o que nos mostra que F é injetora em $B_{x_0}(\delta)$.

Provemos agora que para $\forall x \in B_{x_0}(\delta), \beta \in R^*_+$ $| \beta < \delta - | x - x_0 |$, o que implica $\overline{B_x(\beta)} \subset B_x(\delta)$, tem-se $F(B_x(\beta)) \supset B_{F(x)}(\alpha\beta)$

Seja $y \mid |y - F(x)| < \alpha\beta$ e $g(z) = |y - F(z)|$, $z \in \overline{B_x(\beta)}$

de (2) vem que $|z - x| = \beta \rightarrow$

$2\alpha\beta \leq |F(z) - F(x)| \leq g(z) + g(x) < g(z) + \alpha\beta \rightarrow$

$g(x) < \alpha\beta \leq g(z)$ para $|z - x| \leq \beta$ ou

$g(z) < \alpha\beta < g(z)$ para $|z - x| < \beta$

Como g é uma função contínua e $\overline{B_x(\beta)}$ compacto

$$\exists\, \omega \in \overline{B_x(\beta)} \mid g(\omega) \leq g(z), \qquad \forall z \in \overline{B_x(\beta)} .$$

Tome-se agora $\mu = y - F(\omega)$.

Como F'_{x_0} é inversível, $\exists\, \Delta \in R^n \mid F'_{x_0}(\Delta) = \mu$

Seja $\varepsilon \in |0, k|$, $k \in |0, 1|$, $|\omega + k\Delta \in B_x(\beta)$.

Tem-se $|F(\omega) - y - F'_{x_0}(\varepsilon\Delta)| = (1 - \varepsilon)|\mu|$.

Usando novamente a desigualdade (1), verifica-se

$$|F(\omega + \varepsilon\Delta) - F(\omega) - F'_{x_0}(\varepsilon\Delta)| \leq \frac{1}{2}|\varepsilon\mu|$$

Somando as duas últimas expressões,

$$|F(\omega + \varepsilon\Delta) - y| \leq (1 - \frac{\varepsilon}{2})|\mu|, \text{ mas}$$

$g(\omega + \varepsilon \Delta) = |y - F(\omega + \varepsilon \Delta)|$, e

$g(\omega) = |y - F(\omega)| = |\mu|$. Portanto

$$g(\omega + \varepsilon \Delta) \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) g(\omega).$$

Disto conclue-se que $g(\omega) = 0$, pois tomamos ω como mínimo de g. Assim $F(\omega) = y$ e provamos que todo ponto de $F(B_{x_0}(\delta))$ é interior ou, noutras palavras, que $F(B_{x_0}(\sigma))$ é aberto de R^n.

Provemos agora que F^{-1} é continuamente diferenciável em $F(B_{x_0}(\delta))$ e que $(F'_x)^{-1} = (F^{-1})'_x$.

Sejam

$x = F^{-1}(y)$, $y \in F(B_{x_0}(\delta))$,

$\Delta' \mid y + \Delta' \in F(B_{x_0}(\delta))$ e

$\Delta = F^{-1}(y + \Delta') - F^{-1}(y)$.

Como se havia tomado $\| F'_x - F'_{x_0} \| < 2\alpha < 4\alpha = \dfrac{1}{\| (F'_{x_0})^{-1} \|}$

e F'_{x_0} era por hipótese inversível, a proposição I - 31 do capítulo I nos assegura que F'_x é inversível. Das definições de Δ, Δ' e de aplicação diferencial segue que

$$\Delta' = F(x + \Delta) - F(x) = F'_x(\Delta) + \text{rest}(\Delta) \rightarrow$$

$$(F'_x)^{-1}(\Delta') = (F'_x)^{-1}(F'_x)(\Delta) + (F'_x)^{-1}(\text{rest } \Delta) = \Delta + (F'_x)^{-1}(\text{rest } \Delta)$$

Usando a inequação (2) segue que

$$\frac{|(F'_x)^{-1}(\text{rest}(\Delta)|}{|\Delta'|} \leq \frac{\|(F'_x)^{-1}\| \cdot |\text{rest } (\Delta)|.}{2\alpha|\Delta|}$$

Tomando o limite para $\Delta \to 0$ vê-se que

$$F^{-1}(y + \Delta') - F(y) = (F'_x)^{-1}(\Delta') + 0_2(\Delta').$$

Da unicidade da aplicação diferencial vem que $(F'_x)^{-1} = (F^{-1})'_{F(x)}$.

Do fato da inversão de um operador linear ser uma função contínua segue que F^{-1} é continuamente diferenciável.

Q.E.D.

Teorema III - 2 (Teorema da função implícita)

Dada $F : R^n \times R^m \to R^m$ continuamente diferenciável numa vizinhança U de (x_0, y_0), $x_0 \in R^n$, $y_0 \in R^m$ tal que $F(x, y) = 0$, seja M a matriz

$$M = (\partial_{n+j} F^i (x,y)) \qquad i, j \in \{1 \ldots m\}.$$

Se M for inversível existe um aberto de R^n, $V \ni x_0$, e um aberto de R^m, $W \ni y_0$, nos quais a função

$h : V \to W \mid F(x, h(x)) = 0$, existe e é única.

A demonstração do teorma faz-se, essencialmente, pelo teorema da função inversa*.

Antes de terminar a secção definimos ainda alguns conceitos que nos serão necessários.

Definição III - 5

Dada uma função $F : R^n \to R^m$, diz-se que o posto de F, Rk (F), é P, em x, sse F'_x for de posto P, isto é :

$\dim R(F'_x) = P$.

Definição III - 6

Uma função $F : R^n \to R^m$ é um C^r - difeomorfismo sse:

1) F é um homeomorfismo.

2) F^i e $(F^{-1})^j$ são de classe C^r.

Por brevidade um C^∞ - difeomordismo será denominado, simplismente, difeomorfismo.

Teorema III - 3 (Teorema do posto)

Dado $F : R^n \to R^m$ de posto P em U aberto de R^n, afirmamos que, dado $x_0 \in U$, existe um aberto $U' \subset U$, $x_0 \in U \mid$

---

* Veja (Spivak, 65)

$\exists$ G, H , G : $R^n \to R^m$, H : $R^m \to R^m$ difeomordismos, e

$$G \circ F \circ H^{-1}(x) = (y^1, y^2, \ldots, y^P, 0, \ldots, 0), \forall x \in U'.$$

//

A segunda secção do capítulo dedica-se ao conceito de variedade. Iniciamos definindo uma variedade topológica e, a seguir, definimos a noção de estrutura diferencial.

Nesta secção estudamos ainda relações entre duas variedades como mergulho, imersão e subvariedade.

Definição III - 7

Um espaço topológico M, é dito uma variedade topológica sse:

1) M é Housdarff

2) M é de base enumerável

3) $\forall$ P $\in$ M, $\exists$ U aberto em M | P $\in$ U e existe um homeomorfismo ϕ : U $\to$ V , V aberto de R^m.

A propriedade 3) é referida como M ser localmente euclidiano, dizemos que a dimensão de M é m e que ϕ é uma função coordenada em U. As duplas (U,ϕ) serão denominadas cartas de M.

Proposição III - 5

Uma variedade topológica é localmente conexa, localmente compacta, união de um conjunto enumerável de conjuntos compactos e metrizável.

Observação:

Dada uma carta (U,x), $x : U \to R^m$, frequentemente notaremos,para $P \in U$:

$x(P) = x$ e $x^i = \pi^i \circ x$ ou $x^i = \pi^i \circ x(P)$.

Dificilmente haverá confusão entre a referência a função coordenada ou o seu valor num ponto, mas se a situação ocorrer seremos cautelosos e usaremos uma notação inambígua.

Definição III - 8

Dado M, variedade topológica uma (C^∞) estrutura sobre M é um conjunto de cartas $A = \{ (U_i, \phi_i) \}$ $i \in S$ onde:

1) $\{U_i\}$, $i \in S$, é cobertura de M.

2) $\forall\ U_i, U_j$ tem-se a) $U_i \cap U_j = \emptyset$, ou

b) $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ é um (C^∞) difeomorfismo.

Expressamos estas condições dizendo que as cartas cobrem M e são (C^∞) compatíveis.

Ao invés de C^∞-estruturas poderíamos ter definido C^r - estruturas sobre M. Conceitualmente haveria pouco ganho na generalização, razão pela qual, trataremos daqui em diante apenas do caso C^∞. Por comodidade técnica fazemos ainda uma terceira exigência.

3) Se (V, ψ) é carta de M, compatível com as cartas de A, então $(V, \psi) \in A$.

Expressamos esta condição dizendo que A é um atlas maximal de M. Um conjunto satisfazendo apenas os dois primeiros requisitos da definição é denominado Atlas.

Definição III - 9

Uma variedade diferenciável é uma dupla, (M,A), onde M é uma variedade topológica e A um atlas maximal, ou estrutura, de M.

Proposição III - 6

Dado M variedade topológica e $A = \{(U_i, \phi_i)\}$, $i \in s$, um atlas de M existe uma única estrutura, $\tilde{A}$, de M tal que $A \subset \tilde{A}$. Neste caso, dizemos que $\tilde{A}$ é a estrutura gerada por A.

Demonstração:

Seja $\tilde{A}$ o conjunto de todas as cartas compatíveis com as cartas de A. Devemos mostrar que as cartas de

$\tilde{A}$ são compatíveis entre si.

Sejam (V_i, ψ_1) e (V_2, ψ_2) cartas de $\tilde{A}$.

a) se $V_i \cap V_2 = \emptyset$, são compatíveis por definição.

b) se $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, tomemos $P \in V_1 \cap V_2$.

Como $\{U_i\}$ é cobertura de M, por algum $i \in S$ temos que $p \in U_i$. Seja $W = U_i \cap V_1 \cap V_2$.

Por construção de $\tilde{A}$, temos que em W

$\psi_1 \circ \psi_2 = \psi_1 \circ \phi_i^{-1} \circ \phi_i \circ \psi_2^{-1}$ é um difeomorfismo, pois é composição de dois difeomorfismos.

Q . E .D .

Da mesma maneira que falamos do produto de dois espaços topológicos, gostaríamos de falar do produto de duas estruturas sobre eles. Vejamos como isto é possível.

Definição III - 10

Dadas (M,A), (N,B) variedades diferenciais, definimos a estrutura produto, A x B, sobre o espaço topológico produto, M x N, como sendo a estrutura, $\tilde{C}$, gerada por

$C = \{ (W_{i,j} , \psi_{i,j}) \}$, onde

$W_{i,j} = U_i \times V_j$ e

$\psi_{i,j} : U_i \times V_j \to R^m \times R^n$ é dado por

$\psi_{ij}(p, q) = (\phi_i (p) , \xi_j (q)),$

$p \in M$, $q \in N$, $\{(U_i, \phi_i)\}$ gera A, e $\{(V_j, \xi_j)\}$ gera B.

Proposição III - 7

A estrutura produto está univocamente determinada e é, em realidade, uma estrutura.

Uma vez de posse do conceito de variedades definiremos um grande número de entidades sobre uma variedade, campos vetoriais, campos tensoriais, conexões, etc....O primeiro passo nesta direção é definir uma função numa variedade.

Definição III - 11

Define-se um C^r-função sobre uma variedade , (M,A), como sendo uma função $F : M \to R$ tal que

$\forall (U_i, \phi_i) \in A, \quad \hat{F} = F \circ \sigma^{-1}$ é de classe C^r.

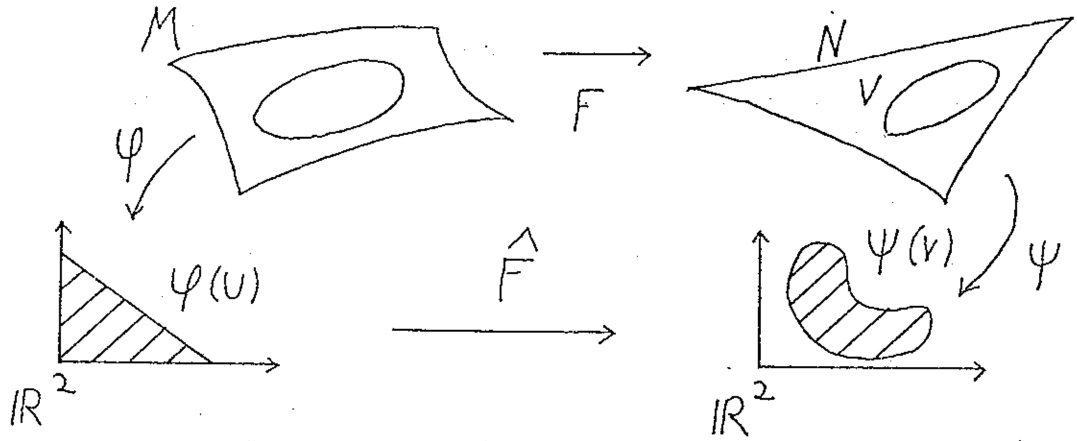
Observação:

Dizemos que $\hat{F} = F \circ \sigma^{-1}$ é a função F em coordenadas e muitas vezes, sempre que não houver ambiguidade , não distinguiremos $\hat{F}$ de F.

Definição III - 12

Dados (M,A) e (N,B) variedades uma função $F : M \to N$, diz-se um C^r-mapa sse para quaisquer duas cartas $(U,\phi) \in A$ e $(V,\psi) \in B$

$\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$, for C^r



Definimos também o posto de F, Rk(F), por Rk(F)= Rk($\hat{F}$).

Proposição III - 8

A composição de C^r-mapas é um C^r-mapa.

No restante da secção abordaremos alguns tópicos que formalizam as idéias de como uma variedade pode estar dentro de outra.

<u>Definição III - 13</u>

Dadas (M,A), (N,B), variedades onde

dim M = m ≤ dim N = n, um C^∞-mapa, F : M → N diz-se uma imersão sse Rk(F) = m.

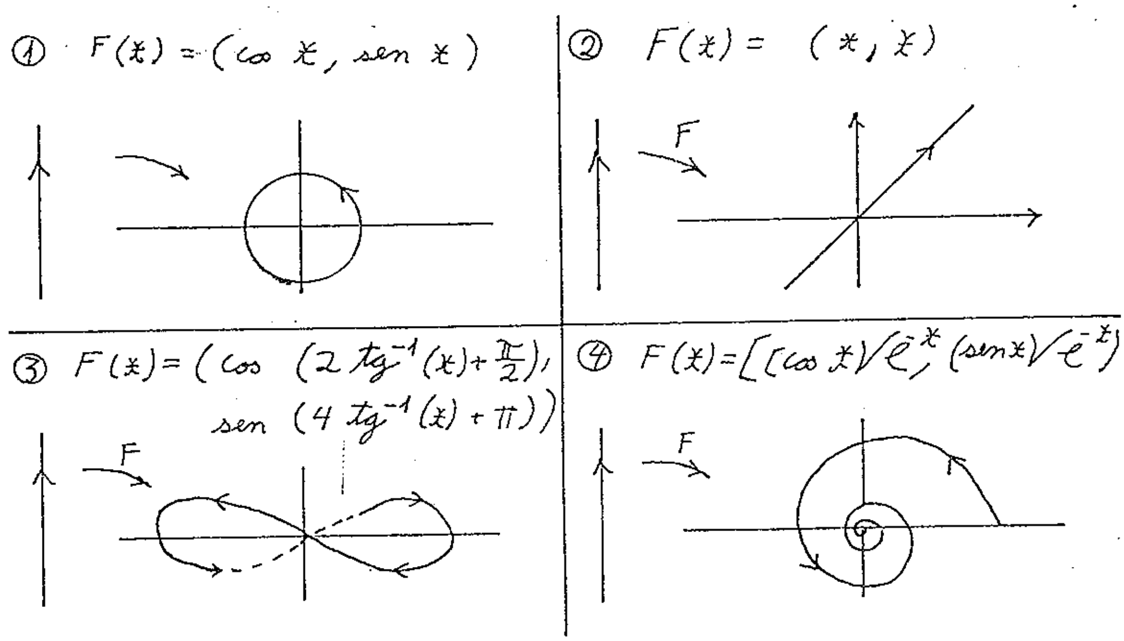
Se ainda F : M → $\tilde{M}$, onde $\tilde{M}$ é o conjunto imagem de F, F(M), com a topologia induzida por N, for um homeomorfismo, F diz-se um mergulho.

Proposição III - 9

Toda imersão é localmente um mergulho, isto é, F : M → N uma imersão, ∃ U aberto de M | $F|_U$ é um mergulho.

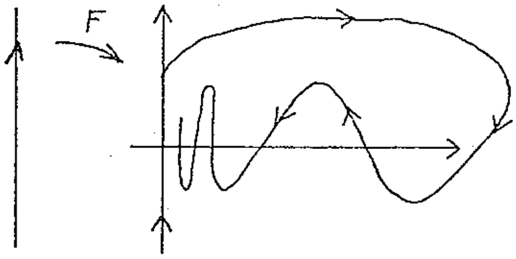
Esta proposição é decorrência dos teoremas do posto e da função inversa.

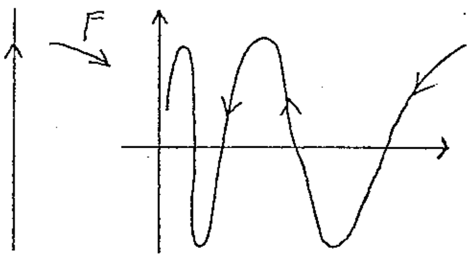
Damos a seguir alguns exemplos clássicos de imersões, de R em R^2, que são e que não são mergulhos, respectivamente exemplos de um número par e impar.



⑤ $F(x)=\begin{cases}(c, x+1), \text{ se } x \leqslant 0 \\ (1/x, \text{ sen}\,\pi x), \text{ se } x \geqslant 1 \\ \text{Como na figura se } 0 < x < 1\end{cases}$

⑥ $F(x) = (e^{-x}, \text{ sen}\,\pi x)$





Definição III - 14

Dadas (M,A), (N,B) variedades e $F : M \to N$, o conjunto imagem, $F(M)$, com essa topologia e estrutura que tornem F um difeomorfismo diz-se:

a) uma sub-variedade imersa sse F for uma imersão.

b) uma sub-variedade mergulhada sse F for um mergulho.

Uma variedade $L \subset N$ diz-se uma sub-varieda de regular sse

1) a topologia de L é a induzida por N;

2) $\forall\, P_0 \in L$, $\exists\, (U,\phi) \in B$, $P_0 \in U$ |

a) $\phi(P_0) = (0, \ldots, 0)$;

b) $\phi(U) = Cb_0(E)$, o cubo de lado $2E$ e centro 0;

c) $P \in U \quad L$,

$$\phi(P) = (x^1, \ldots, x^\ell, 0, \ldots, 0) = (x, 0), \quad x \in R^\ell$$
$$1, \ldots, \ell, \ldots\ldots, n \qquad\qquad 0 \in R^{n-\ell}.$$

A carta (U,ϕ) é dita então carta preferencial em relação a L.

3) A estrutura de L, C, é gerada pelo conjunto das restrições a L, das cartas preferenciais de A, com os valores projetados em R^ℓ, isto é, se (U,ϕ) é uma cara preferencial de A em relação a L.

$$\overline{(U,\phi)} = (U \cap L, \pi^{R^\ell} \phi|_L) \in C, \quad \text{e}$$

$$\pi^{R^\ell} : R^\ell \times R^n \text{ é } \to R^\ell \text{ é dado por}$$

$$\pi(X,Y) = X, \qquad X \in R^\ell, \quad Y \in R^n.$$

Proposição III - 10

Toda sub-variedade mergulhada é regular.

Proposição III - 11

Sejam (M,A) e (N,B) variedades e $F : M \to N$ uma imersão do posto P.

Seja $Y_0 = F(P_0) \in F(M)$, $P_0 \in M$, então $F^{-1}(Y_0)$ é uma sub variedade regular e fechada de dimensão m - P.

———— // ————

Esta secção é inteiramente dedicada a expor, de maneira rigorosa, os conceitos de vetor e de espaço tangente. Sobre a estrutura de espaço vetorial do espaço tangente basear-se-ão uma grande multiplicidade de conceitos e definições.

Definição III - 15

Seja (M,A) uma variedade e F,G, duas funções C^∞, $F : U \to R$, $G : V \to R$. As funções F e G são equivalentes em um ponto $P \varepsilon M$ sse

1) $P \varepsilon U \wedge V$

2) $\exists$ W, aberto de M | $W \subset U \cap V$ e $F|_W = G|_W$.

A classe de equivalência de uma função F, num ponto P, será notada $|F|_P$, e denominada, germe de F em P.

As operações de soma e produto de funções induzem naturalmente operações de soma e produto nas classes. Ao conjunto dos germes num ponto provido das operações de soma e produto denomina-se álgebra dos germes em P,$C^\infty(P)$.

Definição III - 16

Seja (M,A) variedade e $\{F_i\}$ o conjunto das funções C^1 cujo dominio contém $P \varepsilon M$ como ponto interior. Um operador, $v_p : \{F_i\} \to R$ será dito um vetor, ou uma tangente em P, sse:

1) $v_p(\alpha F_i + \beta F_j) = \alpha v_p(F_i) + \beta v_p(F_j)$

2) $v_p(F_i \cdot F_j) = v_p(F_i)\ F_j(p) + v_p(F_j)\ F_i(p)$, esta propriedade é denominada regra de Leibmtz.

Proposição III - 12

Um operador tangente em P está bem definido nos germes em P.

Demonstração:

O que queremos provar é que $F \sim G \to v_p(F) = v_p(G)$.

Pela definição de germe:

$$\exists\, W, \text{ aberto de } M \mid \quad F|_W = G|_W \quad , \qquad P \in W .$$

Da definição de vetor segue trivialmente que se $\mathit{1}$ é a função constantemente igual a 1, em W, $v_p(\mathit{1}) = 0$. Portanto

$$v_p(\mathit{1}) = v_p(F - G) = v_p(F) - v_p(G) = 0.$$

Definição III - 17

Dados v_p e w_p vetores em $P \in M$, (M,A) variedade, definimos a soma e o produto por escalar destes vetores por:

1) $(v_p + w_p)(F) = v_p(F) + w_p(F)$;

2) $(\alpha \,.\, v_p)(F) = \alpha.\,(v_p(F)) \quad , \qquad \alpha \in R$

É de verificação simples, mas tediosa, que as entidades ora definidas são realmente vetores. O conjunto dos vetores, em um ponto P de uma variedade, ficam assim com a estrutura de um espaço vetorial. Este espaço vetorial denomina-se espaço tangente a M em P, T_pM.

Definição III - 18

Dadas (M,A) e (N,B) variedades e a função $F : U \to N$, $P \in U$ aberto de M, definimos as aplicações

1) $F^* : C^\infty(F(P)) \to C^\infty(P)$ por,

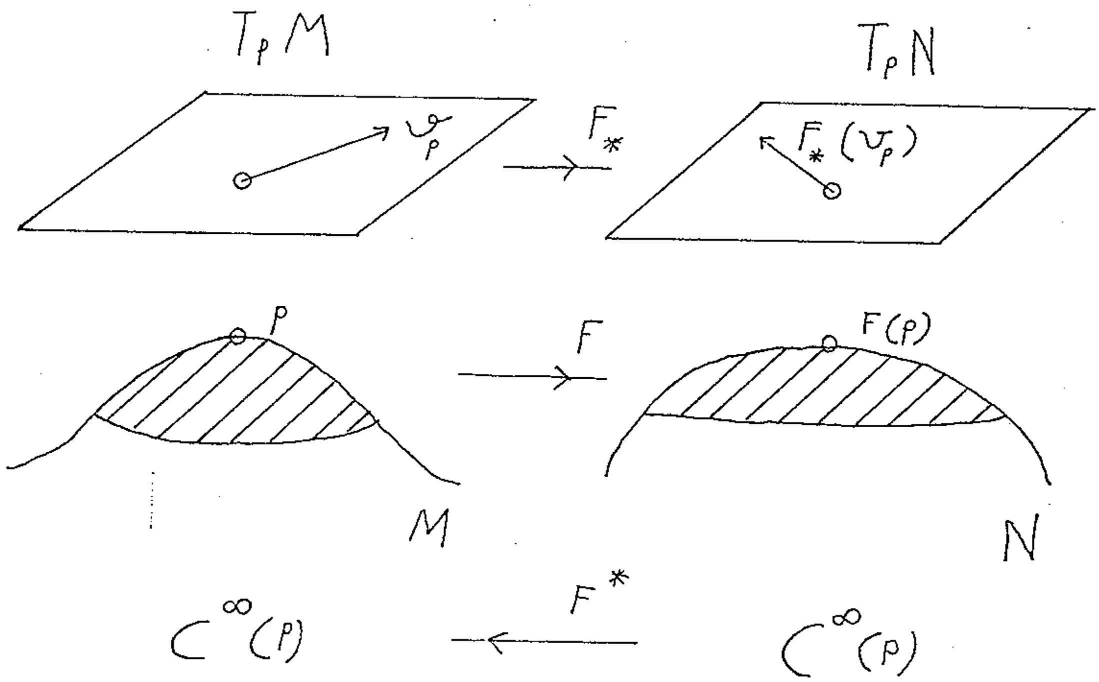
$F^*(|g|_{F(P)}) = |g \circ F|_P$,

que, verifica-se, é um homomorfismo das álgebras dos germes.

2) $F_* : T_P M \to T_{F(P)} M$ por,

$(F_*(v_P)_{F(P)}(g) = v_P(F^*(g))$,

que, verifica-se, é um homomorfismo dos espaços tangentes.



Proposição III - 13

Dadas (M,A), (N,B), (L,C) variedades, e os C^∞-mapas $\mu : L \to M$, $\nu : M \to N$, $\lambda = \mu \, 0 \, \nu$, e $I : M \to M$ a aplicação identidade, temos que:

1) I^* e I_* são as identidades em, respectivamente $C^\infty(P)$ e T_PM.

2) $\lambda^* = \nu^* \, 0 \, \mu^*$ e $\lambda_* = \mu_* \, 0 \, \nu_*$.

3) Se ν é um difeomorfismo, então $\nu_* : T_PM \to T_PN$ é um isomorfismo.

//

Desenvolveremos nesta secção várias idéias intimamente relacionadas com as idéias de vetor e de espaço tangente, definidos na secção precedente.

A primeira parte da secção tem como linha mestra o conceito de curva e estuda uma série de relações entre curvas e vetores.

O final da secção é dedicado ao conceito de fibrado vetorial.

Definição III - 19

Dada uma variedade (M,A) denomina-se curva aberta em M a um mapa :

$\gamma : |\alpha, \beta| \to M$, $\alpha, \beta \in R$.

Definimos também a noção mais geral de curva em M como sendo a restrição a um intervalo, $|\gamma, \delta|$ ou $|\gamma, \delta|$

ou $|\gamma,\delta|$ contido em $|\alpha,\beta|$, da curva aberta original.

Diz-se que a curva γ é regular sse é uma imersão de posto 1.

Uma proposição algo técnica que convém apenas ser mencionada é

Proposição III - 14

Se uma variedade é conexa então é conexa por caminhos e é também conexa por curvas.

A definição seguinte é muitas vezes tomada como a própria definição de vetor, e traduz mais intuitivamente a idéia de vetor como deslocamento infinitesimal.

Definição III - 20

Dada uma curva $\gamma : E \to M$, E um intervalo de R e (M,A) variedade definimos o vetor associado a γ em $t \in E$, $\gamma_*(t)$, por

$$|\gamma_*(t)|(g) \equiv \partial_1(g \circ \gamma)|_t$$

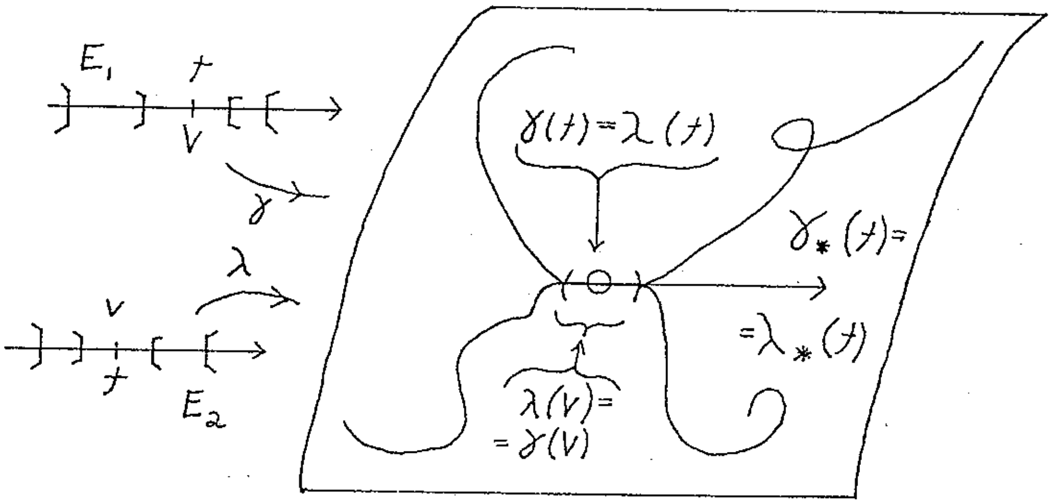
verifica-se facilmente que $\gamma_*(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

Proposição III - 15

Dados E_1, E_2, intervalos de R, $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, $\lambda : E_1 \to M$ e $\gamma : E_2 \to M$ curvas em (M,A) então, se existe um aberto $V \subset E_1 \cap E_2$ tal que

$\gamma|_V = \lambda|_V \rightarrow \gamma_*(t) = \lambda_*(t), \quad \forall\ t \in V.$

Noutras palavras a aplicação tangente associada, $* : (\gamma,t) \rightarrow T_{\gamma(t)}M$ está bem definida nos germes



Como exemplo ilustrativo tomemos R^n como variedade e $\gamma : R \rightarrow R^n$. Se

$\gamma(t) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, t, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$

$\gamma_*(\alpha_i) = \partial_i|_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \quad \in \quad T_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}R^n$

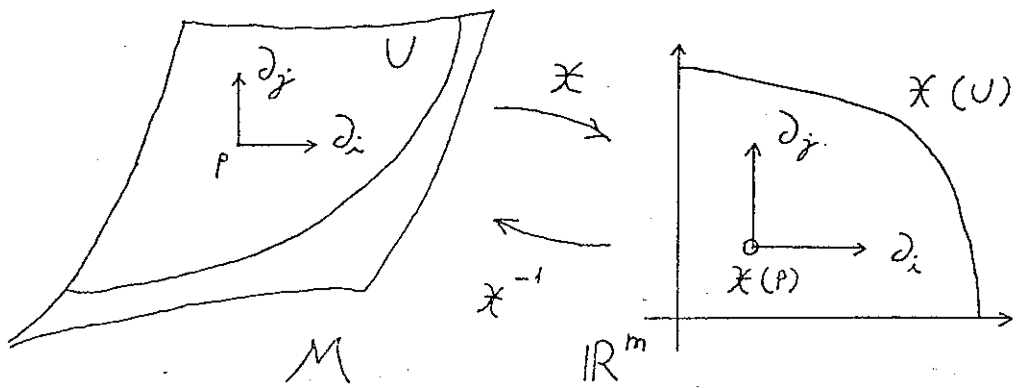
Definição III - 21

Dados (M,A) variedade, $(U,x) \in A$ e $P \in U$, definimos o i-esimo vetor coordenado em P, $\partial_i|_P$, ou também $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, por:

$\partial_i|_P = (x^{-1})^* \, (\partial_i|_{x(P)})$, ou seja

$$\partial_i(f) = \partial_i((x^{-1})^*(f)) = \partial_i(f \circ x^{-1}), \ \forall \ f : M \to R.$$

Como $\{ \partial_i|_{x(P)} \}$ é base de $T_{x(P)}R^n$ e x é um difeomorfismo $\{\partial_i|_P\}$ é base de T_PM, a base dos vetores coordenados, em relação a carta (U,x).



O símbolo ∂_i é pois ambíguo, designando tanto um vetor no R^n como em T_PM. Esta ambiguidade é usual na literatura.

Proposição III - 16

Dados (M,A) variedade, (U,x) ε A, P ε U e $v_p \ \varepsilon \ T_PM$, temos:

1) $v_p = \alpha^i \partial_i$, onde $\alpha^i = v_p(x^i)$ e $x^i = \pi^i \circ x$.

2) Dados uma segunda carta (V,y) ε A tal que P ε U $\cap$ V, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \left| \frac{\partial}{\partial y^i} (x^j \circ y^{-1}) \right| \frac{\partial}{\partial x^j}$$

3) Dados (N,B) variedade, $F : M \to N$ difeomorfismo, $(V,y) \in B$ e $F(P) \in V$, temos que $\forall\ v_p \in T_pM$

$$F_*(v_p) = F_*(v_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}|_P) = v_p(x^i)\ F_*(\frac{\partial}{\partial x^i}) =$$

$$= v_p(x^i) \left|\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{F(P)} (y^j \circ \hat{F}) \left|\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(P)}$$

O segundo ponto da proposição denomina-se regra da mudança de base , e o terceiro ponto, regra da cadeira.

Analisemos alguns casos particulares dos da regra da cadeia.

a) se $M = R$ então F é uma curva e

$$F_*(\partial_1|_x(g) = \partial_1|_x F^*(g) = \partial_1|_x(g \circ F) = F_*(x)(g).$$

b) se $N = R$ então F é uma função $F : M \to R$ e

$$F_*(v_p) = \alpha\ \partial_1|_{F(P)},\ \text{onde } \alpha = v_p(F).$$

Definição III - 22

Dados (M,A) variedade e $F : M \to A$, definimos a aplicação diferencial de F em P, $dF : T_pM \to R$, por $dF(v_p) \equiv v_p(F)$.

Da última proposição segue que:

$F_*(v_p) = dF(v_p) \cdot \partial_1|_{F(P)}$.

Pela definição de dF nota-se que dF é um vetor do espaço dual de T_PM, que notamos T_P^*M. Vemos ainda que:

$dx^i(\partial_j) = \partial_j x^i = \delta_j^i$, onde $x^i = \pi^i \circ x$

e concluimos que $\{dx^i\}$ é a base dual de $\{\partial_i\}$. Podemos ainda obter a seguinte relação interessante:

$dF(v_p) = v_p(F) = v_p(x^i)\partial_i F = dx^i(v_p)\partial_i F$.

Portanto $dF = \partial_i F dx^i \in T_P^*M$.

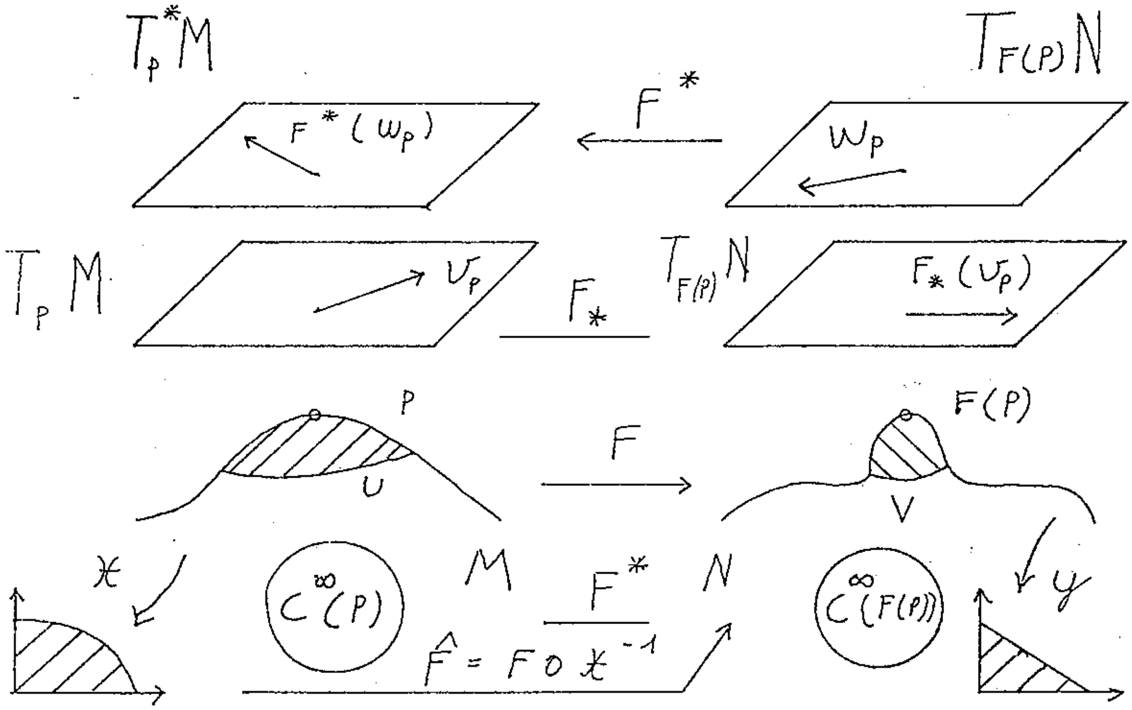
Definição III - 23

Sejam (M,A) e (N,B) variedades $F : U \to V$, $(U,x) \in A$, $(V,y) \in B$ e $P \in U$. Definimos, a aplicação

$F^* : T^*_{F(P)}N \to T^*_P M$ por

$F^*(W_{F(P)})(v_p) \equiv W^*_{F(P)}(F_*(v_p))$, $v_p \in T_PM$, $W_{F(P)} \in T^*_{F(P)}N$.

Por analogia a proposição , temos que F^* é um homeomorfismo, e se F é um difeomorfismo F^* é um isomorfismo, de $T^*_{F(P)}N$ em T^*_PM.



Proposição III - 17

Nas mesmas condições da última definição verifica-se a identidade:

dado $W_{F(P)} = \alpha_i \, dy^i_{F(P)}$ então $F^*(W_{F(P)}) = \dfrac{\partial(y^i \circ \hat{F})}{\partial x^j} \alpha_i dx^j$.

Demonstração:

$$| F^*(W_{F(P)}) | \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_P\right) = W_{F(P)}\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) =$$

$$= W_{F(P)} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j} y^k \circ \hat{F} \right) \frac{\partial}{\partial y^k} \right).$$

de $W_{F(P)} = \alpha_i dy^i$ e de $dy^i\left(\dfrac{\partial}{\partial y^k}\right) = \sigma^i_k$ segue a proposição.

Estamos agora em condições de definir a noção de Fibrado. Começaremos pelo fibrado tangente, que definiremos cuidadosamente, e indicaremos a seguir como generalizar o conceito .

A idéia básica da noção de fibrado tangente é, dado uma variedade (M,A), encontrar uma estrutura para o conjunto $\bigcup_{P\varepsilon M} T_P M$.

Definição III - 24

Dados (M,A) variedade define-se o fibrado tangente a M como sendo a variedade $TM = (\bigcup_{P\varepsilon M} T_P M, \tilde{A})$ onde $\tilde{A}$ é estrutura gerada pelo conjunto das extensões das cartas de A.

Dada uma carta (U,x) ε A definimos a extensão desta carta $(\tilde{U},\tilde{x})$ ε $\tilde{A}$ da seguinte maneira:

seja $\pi : \bigcup_{P\varepsilon M} T_P M \rightarrow M$ dado por $\pi(v_p) = P$,

$\pi^i : R^m \rightarrow R$ a projeção no i-esimo coordenada.

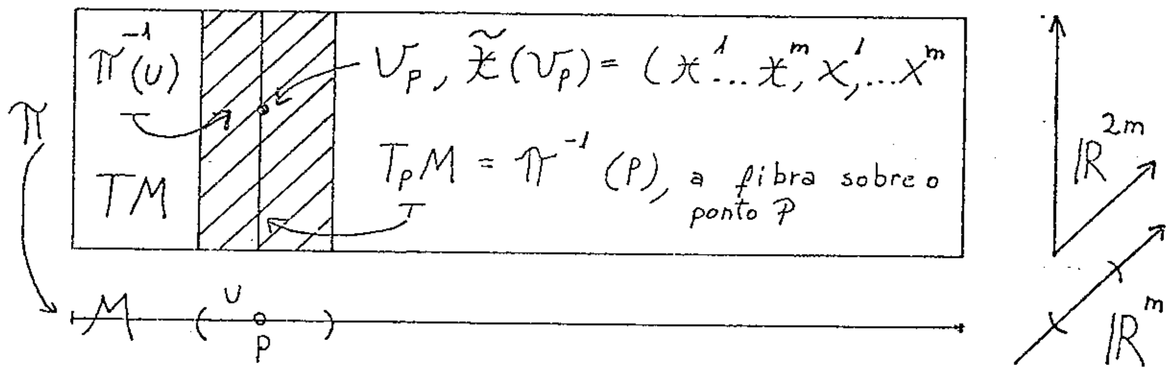
$\tilde{U} \equiv \pi^{-1}(U)$, e $\tilde{x} : \tilde{U} \rightarrow R^{2m}$ é definido por

$\tilde{x}\,(v_p) = (x^1, \ldots, x^m, X^1, \ldots, X^m)$, onde

$x^i = \pi^i \, 0 \, x(P)$ e $X^i = v_p(x^i)$, de modo que

$v_p = X^i \, \partial_i$.

A topologia sobre $\bigcup_{P \varepsilon M} T_P M$ é a induzida por R^{2m} pelas cartas de $\tilde{A}$.



Proposição III - 18

O fibrado tangente de uma variedade é efetivamente uma variedade.

<u>Definição III - 25</u>

Nas mesmas condições da definição precedente, define-se um C^r-campo vetorial em M, como sendo uma função $v : M \to TM$ tal que:

1) $\pi \circ v$ é a identidade em M.

2) $\tilde{x} \circ v \circ x^{-1} : R^m \to R^{2m}$ é de classe C^r.

Usualmente escreveremos o valor de v num ponto $P \varepsilon M$ como $v(p)$ ou v_p. Quando não se mencionar a classe de um dado campo fica implicito que e C^∞.

Proposição III - 19

Se (N,B) é uma sub variedade regular de (M,A), e v é um campo vetorial em M, então $v|_N$ é um campo em N.

No capítulo I vimos como definir sobre um espaço tensorial de tipo (r,s) sobre T_PM que será notado $(T^r_s)_PM$. Naturalmente

$$(T^1_0)_PM = T_PM, \quad (T^0_1)_PM = T^*_PM, \quad (T^0_0)_PM = R \quad e$$

$T_P \;\varepsilon\; (T^r_s)_PM$ é uma aplicação linear

$$T_P : T^*_P M \times \ldots \times T^*_P M \times T_PM \times \ldots \times T_PM \to R,$$

com r cópias de T^*_PM e s cópias de T_PM, e

$$\{ \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_r} \} \; i, j \;\varepsilon\; \{ 1 \ldots m \}$$

é base de $(T^r_s)_PM$.

Em perfeita analogia ao caso do Fibrado tangente definimos o (r,s) - Fibrado tensorial sobre M, T^r_sM, sendo que dado (U,x) carta de (M,A)

$$\tilde{U} \equiv \pi^{-1}(U), \text{ onde } \bigcup_{P\varepsilon M} (T^r_s)_PM \to M \text{ é dado por}$$

$$\pi(T_P) = P \quad e$$

$$\tilde{x} : \bigcup_{P\varepsilon M} (T^r_s)_PM \to R^{(r+s+1)m} \quad \text{é dado por}$$

$\tilde{x}\ (T_p) = (x^1, \ldots, x^m, X^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots j_s}),\ i,\ j\ \varepsilon\ \{1\ldots m\}$

onde $X^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ são as componentes de T_p na base

$\{ \partial_i, \ldots, \partial_{i_r}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_s} \}$.

A T^0_1M notamos também T^*M que também denominamos fibrado cotangente a M.

//

Esta secção é dedicada ao estudo de alguns aspectos da teoria dos grupos de Lie, e conceitos correlatos como derivada de Lie, fluxo e álgebra de Lie de um grupo.

Definição III - 26

Seja G um grupo, e ao mesmo tempo (G,A) uma variedade. G diz-se um grupo de Lie sse forem diferenciais às aplicações:

1) $\mathcal{U} : G \times G \to G$ dado por

$\mathcal{U}\ (a,b) = a.b$

2) $(\ )^{-1}: G \to G,$ dado por

$a^{-1}a = aa^{-1} = e$, onde e é a unidade de G.

Proposição III - 20

Dado G,H, grupos de Lie G x H, que é como grupo o produto direto, e como variedade a variedade produto , é também um grupo de Lie.

Definiremos agora a noção de um grupo sobre u ma variedade. Escolhemos definir ação a esquerda, em G x M, mas poderiamos igualmente bem ter optado por definir ação a direita, em M x G. Ambas as ações são usadas na literatura.

Definição III - 27

Dados (M,A) variedade e G um grupo diz-se de certo uma aplicação $\mathcal{U} : G \times M \rightarrow M$, que é a ação (a esquerda) do grupo G em M sse

1) $\mathcal{U}(e,x) = x, \ \forall\, x \in M$, e a unidade em G.

2) $\mathcal{U}(\, b, \mathcal{U}(a,x)\,) = \mathcal{U}(b \,.\, a,\, x), \quad \forall\, x \in M,\ a,\ b \in G.$

Utilizam-se também as notações $\mathcal{U}(a,x) = \mathcal{U}_a(x) = \mathcal{U}_x(a) = a \,.\, x$.

Proposição III - 21

Nas condições da definição anterior $(\mathcal{U}_a)^{-1} = \mathcal{U}_{a^{-1}}$.

No momento o caso mais interessante de grupo sobre uma variedade e o de grupo a um parâmetro.

Definição III - 28

Denomina-se grupo a um parâmetro, ou fluxo global, a uma aplicação C^{∞}, $\mathcal{U} : R \times M \rightarrow M$ onde R são os reais, tomados como grupo em relação a soma, (M,A) é uma variedade e $\mathcal{U}$ é uma ação de R em M.

Define-se também grupo local a um parâmetro, ou fluxo, como sendo um conjunto de aplicações C^∞,

$\mathcal{U} : \bigcup_{P \in M} I_P \times \{P\} \to M$, onde $P \in M$ e I_P é um intervalo aberto $| \; 0 \in I_P$ e,

1) $\mathcal{U}_0(P) = P, \quad P \in M$

2) $\mathcal{U}_t(\mathcal{U}_{t'}(P)) = \mathcal{U}_{t+t'}(P), \quad t, t', t + t' \in I_P$

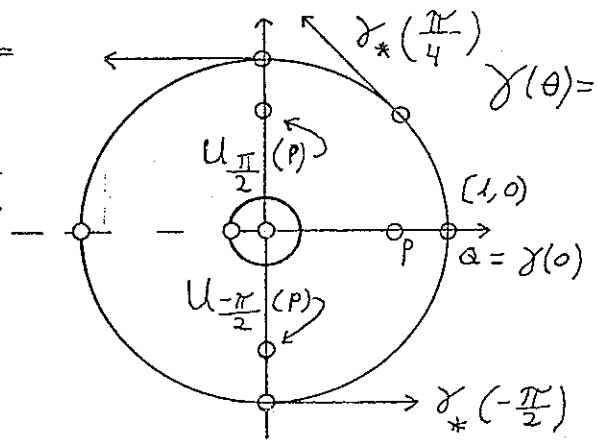
3) Se $\mathcal{U}_t(P) = Q$, $| \alpha, \beta | = I_P$ e $| \gamma, \delta | = I_Q$, então $\gamma = \alpha - t$ e $\sigma = \beta - t$.

Dado $\mathcal{U}$, um fluxo em M, tome-se a curva $\gamma(t) = (t,P)$, $t \in I_P$, $P \in M$. Diz-se que $\gamma_*(0) \in T_PM$ e o gerador infinitesimal do fluxo em P.

A uma curva $\lambda(s)$, tal que, $\lambda_*(s)$ é igual ao gerador infinitesimal de $\mathcal{U}$ em $Q = \lambda(s)$, para todo s no domínio de definição de λ, denomina-se curva integral.

Sem nos preocuparmos em formalizar o exemplo apresentamos "graficamente" um fluxo em $C - \{(x,0) \mid x < 0\}$

$\mathcal{U}_\theta((x,0)) = (x)e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$



$\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$

$I_P =]-\pi, \pi[$

$I_{\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}(P)} =]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

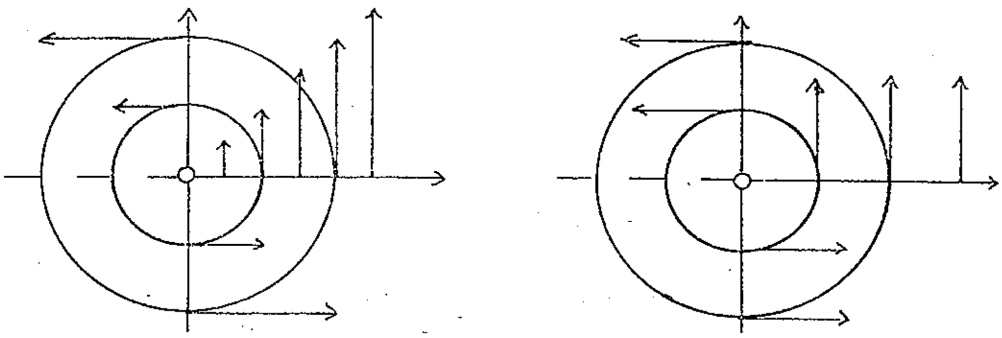
$I_{\mathcal{U}_{-\frac{\pi}{2}}(P)} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Definição III - 29

Nas mesmas condições da definição anterior, um campo v em M é dito invariante pela ação do grupo G em M, ou invariante pelo fluxo, sse

$$\mathcal{U}_{t*}(v_P) = v_{\mathcal{U}_t(P)} \qquad \forall\ P \in M,\quad t \in G \text{ (ou } t \in I_P).$$

Os dois exemplos abaixo ilustram campos invariantes pelo fluxo do exemplo anterior.



Teorema III - 4

Dados (M,A) variedade e v um campo em M, existe um único fluxo $\mathcal{U}$ em M tal que:

1) O campo v coincide com o campo dos geradores infinitesimais de $\mathcal{U}$.

2) Os intervalos I_P são maximais, isto é $\forall\ \gamma(t): |\alpha,\beta| \to M$ curva integral com início em P, ou seja $\gamma(0) = P$, temos que $|\alpha,\beta| \subset I_P$ e que $\mathcal{U}_t|_{|\alpha,\beta|} = \gamma(t)$.

3) Para $\forall\ P \in M$, fazendo $\gamma(t) = \mathcal{U}_t(P)$, ou

a) $\gamma(t) = P$, $\forall\ t \in I_P$, ou

b) $\gamma(t)$ é uma imersão.

Os itens 1 e 2 do teorema dependem em essência de teorema sobre existência, dependência diferenciável em relação aos condições iniciais, e existência de intervalo maximal de solução para equações diferenciais ordinárias*.

Quanto a terceira parte, vemos que $U_t(P)$ é uma aplicação C^∞ e inversível, isto é um difeomorfismo, e portanto $\mathcal{U}_{t*} : T_P M \to T_{\mathcal{U}_t(P)} M$ é um isomorfismo. Portanto se $v_P = 0, \forall Q \mid Q = \mathcal{U}_t(P), v_Q = 0$.

A segunda noção de grande importância a ser definida nesta secção é a de derivada de Lie, que estudaremos a seguir.

Definição III - 30

Sejam (M,A) variedade, v, w, campos de vetores em aberto $U \subset M$, X campo de covetores, f campo escalar e T e S campos tensoriais em U. Definimos a derivada de Lie, em relação ao compo v, de um campo tensorial como sendo um operador $L_v : T^r_s M \to T^r_s M$, dado por:

1) $\quad | L_v(f) |_P = v_P(f)$

2) $\quad | L_v(w) | = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t} \mid w_P - | \mathcal{U}_{t*} | \; (w_{\mathcal{U}_t(P)}) \mid$

---

* Veja-se por exemplo (Oliva , 73)

3) $\left| L_v(X) \right|_P = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t} \left| X_P - (\mathcal{U}_t^*)^{-1}(X_{\underline{\mathcal{U}}_t(P)}) \right|$

4) $\left| L_v (T \otimes S) \right|_P = L_v(T) \otimes S + T \otimes L_v(S)$.

Proposição III - 22

Nas mesmas condições da definição anterior tem-se:

1) $L_v (df) = d(v(f))$.

2) $L_v (T + S) = L_v T + L_v S$.

3) $L_{v+w}(T) = L_v(T) + L_w(T)$.

Demonstraremos a primeira identidade

$$\left| L_v(df) \right| (w_p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left| (df)_P - (\mathcal{U}_t^*)^{-1}(df)_{\underline{\mathcal{U}}_t(P)} \right| (w_p) =$$

usando que $(\mathcal{U}_t)^{-1}(df)_{\underline{\mathcal{U}}_t(P)} = (df)_{\underline{\mathcal{U}}_t(P)} \underline{\mathcal{U}}_t{}^*$ e

que $df(w) = w(f)$ vemos que

$$\left| L_v(df) \right| (w_p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left| w_p(f) - w_p\, (\mathcal{U}_t^* (f) \right| =$$

$$= w_p \left| \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (f - f \circ \mathcal{U}_t) \right| = w_p\, (v(f)) = \left| d(vf) \right|_P (w_p).$$

Examinamos agora uma interpretação bastante intuitiva da derivada de Lie.

Seja (M,A) uma variedade, $\{e_i\}$ uma base de $T_P M$ e $\{E^i\}$ sua base dual. Seja ainda $\mathcal{U}(t,P)$ o fluxode um campo v em M.

Dizemos do conjunto das bases $\{e_i\}_P$, onde $P = \mathcal{U}_t(P_0)$ para $t \in I_{P_0}$, é um referencial móvel sobre a curva $\gamma(t) = \mathcal{U}_{P_0}(t)$ sse

$$e_{i\,\mathcal{U}_t(P_0)} = \mathcal{U}_{t*}(e_{iP}).$$

Seja $\{ e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, E^{j_1}, \ldots, E^{j_s} \}$ a base cônica de $(T^r_s)_P M$, onde $\{e_i\}_P$ é um referencial móvel sobre $\gamma(t) = \mathcal{U}_{P_0}(t)$. Se S é um campo tensorial de tipo (r,s), em M e $S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ são suas componentes no referencial móvel, temos, para $P = \mathcal{U}_{P_0}(t)$ e $T = L_v S$

$$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(P) = \gamma_* \left| S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(P) \right| = \frac{d\left|T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(\mathcal{U}_{P_0}(t))\right|}{dt}$$

As duas proposições seguintes referem-se, a primeira, a existência de cartas numa variedade cujos vetores coordenados coincidem com campos pré-estabelecidos, e a segunda, a uma fórmula de cálculo para derivadas de Lie.

Proposição III - 23

Dado (M,A) variedade e v um campo em $M | v_P \neq 0$ para algum $P \in M$, existe uma carta (U,y), $P \in U$ para a qual $\partial_1 = v$.

Demonstração

Seja $(V,x) \in A \mid P \in V$, $x(P) = 0$ e $(v, \frac{\partial}{\partial x^\ell})$, $\ell \in \{2,3, \ldots, m\}$, seja base de $T_P M$.

Seja a função $(y^{-1}) : R^m \to M$ definida por $(y^{-1})(t, x^2, \ldots, x^m) = U_t x^{-1}(0, x^2, \ldots, x^m)$, $x^i \in R$.

Se numa vizinhança U de P, (y^{-1}) for inversível sua inversa, $y = (y^{-1})^{-1}$, é uma função coordenada tal como se deseja. Note-se agora que $(y^{-1} \circ x) : R^m \to R^m$ tem, em 0, posto m, pois

$$(y^{-1} \circ x)_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \begin{cases} v, \text{ se } i = 1 \\ \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{se } i \in \{2, \ldots, m\}. \end{cases}$$

Vê-se então que $(y^{-1})_*$ é um isomorfismo e, pelo teorema da função inversa, para alguma vizinhança U de A, (y^{-1}) é inversível.

Pode-se extender este resultado da maneira seguinte:

sejam $v_1 \ldots v_k$ campos em W aberto de M, com seus respectivos fluxos $U_t^1, \ldots, U_t^k$.

Se os campos forem L I em P, e se $\mathcal{U}^i_t \circ \mathcal{U}^j_s = \mathcal{U}^j_s \circ \mathcal{U}^i_t$, $\forall\ i, j \in \{1 \ldots k\}$, seja $(W,x) \in A \mid P \in W$, $\left(v_1, \ldots, v_k, \dfrac{\partial}{\partial x^{k+1}}, \ldots \dfrac{\partial}{\partial x^m}\right)$ é base de $T_P M$ e $x(P) = 0$.

Definimos

$$(y^{-1})(t_1 \ldots t_k, x^{k+1}, \ldots, x^m) = \mathcal{U}^1_{t_1} \circ \ldots \circ \mathcal{U}^k_{t_k} \circ x^{-1}(0, \ldots \ldots, 0, x^{k+1}, \ldots, x^m).$$

Analogamente ao caso anterior pode-se usar o teorema da função inversa para garantir, numa vizinhança U de P, a inversibilidade de (y^{-1}). A carta (U,y) é tal como se deseja.

Proposição III - 24

Seja (M,A) variedade $(U,x) \in A$, v campo em U e T um campo tensorial de tipo (r,s) em U. Temos que:

1) $$(L_v T)^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = v\,(T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s})\ t\ +$$

$$- \sum_{k=1}^{r} T^{i_1 \ldots i_{k-1}, \ell, i_{k+1}, \ldots i_r}_{j_i \ldots j_s}\ \partial_\ell\, v^{i_k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_{k-1}, \ell, j_{k+1}, \ldots j_s}\ \partial_{j_k}\, v^\ell.$$

onde $v = v^i \partial_i$, $v^i = v(x^i)$.

De posse desta fórmula verifica-se válidas as identidades.

2) $| L_v(w) | (f) = v(w(f)) - w(v(f))$.

3) $L_v(w) = - L_w(v)$.

A segunda identidade da proposição anterior é um forte estímulo ao estudo das álgebras de Lie.

Definição III - 31

Dado V, um espaço vetorial, um operador $| \, , |$: $V \times V \to V$ é dito um produto de Lie em V sse:

1) $| \alpha_1 v_1 + \beta v_2, v_3 | = \alpha | v_1, v_3 | + \beta | v_2, v_3 |$.

2) $| v_1, \alpha v_2 + \beta v_3 | = \alpha | v_1, v_2 | + \beta | v_1, v_3 |$.

3) $| v_1, v_2 | = - | v_2, v_1 |$.

4) $| v_1, | v_2, v_3 | | + | v_2, | v_3, v_1 | | + | v_3, | v_1, v_2 | | = 0$

ou seja, é bilinear, antisimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi.

A um espaço vetorial dotado de um produto de Lie denomina-se álgebra de Lie.

Proposição III - 25

Seja (M,A) uma variedade, camp(M) o conjunto dos campos vetoriais em M. Afirma-se que camp(M) com a soma e produto por escalas usuais e o produto de Lie definido por:

$| v, w |(f) = v (w(f)) - w (v(f))$, onde $f \varepsilon Ex (M)$, o conjunto das funções escalares em M, é uma álgebra de Lie.

Demonstração:

1) Primeiramente deve-se notar que camp(M), com os operadores + : camp(M) x camp (M) → camp (M) e . : R x x camp(M) → camp(M), definidos pontualmente nos espaços tangentes, isto é:

$(v + w)_p = v_p + w_p$ e $(\alpha . v)_p \equiv \alpha . v_p$, é um espaço vetorial, embora de dimensão infinita.

2) Dos pontos 2 e 3 da última proposição temos que $| v, w | = = L_v(w) = - | w, v |$.

3) A proposição III - garante a linearidade.

4) Usando diretamente a definição, tem-se $| v, |w,u| |(f) = = (v \circ w \circ u - v \circ u \circ w - w \circ u \circ v + u \circ w \circ v) (f)$. Somando-se sobre as permutações ciclicas de (v, w, u), obtém-se a identidade de Jacobi.

Usando a definição verificam-se ainda as identidades:

1) $| f.v, g.w | = f.g. | v,w | + f . (v (g)). w - g (w(f)).v.$

2) $| v,w | (f.g) = g.| v,w |(f)+ f. |v, w|(g).$

Proposição III -

Seja (M,A) uma variedade, v,w, campos em M , tais que $|v, w|_P=0$, $P \in U$ aberto de M.

Afirma-se a existência, para qualquer $P_0 \in U$, de uma carta $(V,y) \mid P_0 \in V$, $\partial_{1_P} = v_P$ e $\partial_{2_P} = w_P$, $\forall P \in V$.

Demonstração:

Seja $(W,x) \in A \mid x(P_0) = 0$ e $(v_P, w_P, \left.\frac{\partial}{\partial x^3}\right|_P, \ldots,$ $\ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_P)$ é uma base de T_PM. Definimos:

$(y^{-1}) : R^m \to M$ por $y^{-1}(t_1,t_2, x^3,\ldots,x^m) =$

$= \mathcal{U}^1_{t_1} \circ \mathcal{U}^2_{t_2} \circ x^{-1} (0, 0, x^3,\ldots,x^m)$, onde $\mathcal{U}^1$ e $\mathcal{U}^2$ são os fluxos de v e w, respectivamente.

Pelo mesmo argumento utilizado na proposição III - existe um aberto $V \ni P_0 \mid (V,y) \in A$ onde $y \equiv (y^{-1})^{-1}|_V$.

De imediato temos que $\partial / \partial y^1 = v$ e, se $y^1 = t^1 = 0$ temos também que $\partial / \partial y^2 = w$.

Seja a curva $\gamma(t)$ definida por

$$\gamma(t) = U^1_t \circ y^{-1}(0, y^2, \ldots, y^m) = y^{-1}(t, y^2, \ldots, y^m).$$

$$\gamma_*(s)\ (w^i) = \left.\frac{dw^i}{dt}\right|_s = \left.\frac{d(w(y^i))}{dt}\right|_s = \partial_i(w(y^i)) =$$

$$= v(w(y^i)) = w(v(y^i)) = w(\partial_1(y^i)) = w(\delta^i_1) = 0.$$

Como para s=0 temos a condição de contorno $w^i = \delta^i_2$, temos que $w^i(s) = \delta^i_2 \quad \forall s$.

Q.E.O.

O resultado pode ser extendido para k campos vetoriais em M cujos fluxos, dois a dois, comutem.

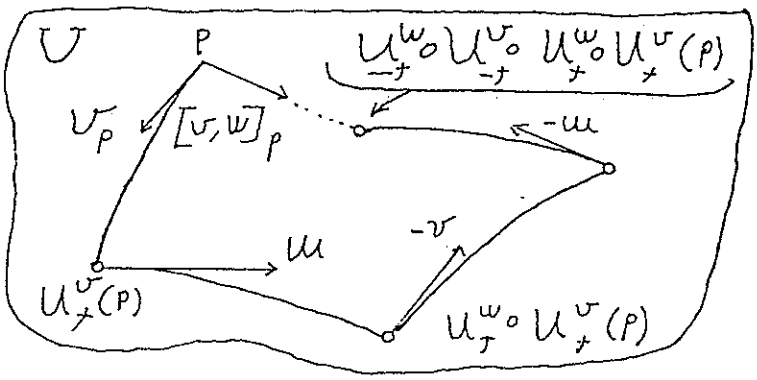
Proposição III - 27

Seja (M,A) uma variedade, $(U,x) \in A$ v, w, campos em $U \ni P$ e $\gamma(t) = U^w_{-t} \circ U^v_{-t} \circ U^w_t \circ U^v_t$, onde U^w e U^v são os fluxos de w e v, respectivamente.

Tem-se que, se $|v, w|_P = \alpha^i\ \partial_i$ então

$x^i(\gamma(t)) =$
$= (t)^2\alpha^i + O_3(t)$

O desenho ao lado ilustra a situação.



Embora não seja estritamente necessário para o seguimento da dissertação, definiremos rapidamente o conceito de distribuição e enunciaremos o teorema de Frobenius.

Definição III - 32

Seja (M,A) uma variedade. Denomina-se k-distribuição a uma função Δ, que a cada ponto $P \in M$ associa um subespaço de T_PM, Δ_P, de dimensão k.

Uma distribuição diz-se C^∞ sse existirem campos (C^∞), $v_1, \ldots, v_k$ tais que $(v_1 \ldots v_k)_P$ seja de base Δ_P, $\forall P \in M$.

Uma C^∞ distribuição diz-se involutiva sse dados campos $v, w \mid v_P, w_P \in \Delta_P \quad \forall P \in M$, tiver-se que $|v, w|_P \in \Delta_P$.

Uma distribuição diz-se integrável sse existir uma imersão $F : N \to M \mid F_* (T_PN) \subset \Delta_{F(P)}$ e F é sobrejetora. Se ainda $F_*(T_PN) = \Delta_{F(P)}$ a distribuição diz-se completamente integrável.

Teorema III - 5 (Teorema de Frobenuis)

Uma distribuição é completamente integrável sse é involutiva.

CAPÍTULO IV

Este quarto capítulo da dissertação é dedicado em essência a desenvolver as teorias de integração e derivação sobre variedades.

Na sua primeira secção é apresentado o conceito de campo de formas e todas as operações correlatas, como derivada exterior, produto interno, etc. O principal resultado da secção é o teorema de Poincaré.

A segunda secção é dedicada à teoria de integração. Procurou-se manter um compromisso entre o rigor e a brevidade necessária para a exposição do assunto.

Esta secção é fortemente dependente, tanto no sentido lógico como no intuitivo, do capítulo II. No final do capítulo são mencionados vários teoremas interessantes, como o teorema De Rham e defendidas algumas relações, como a de enlaçamento, que ilustram uma vez mais as fortes relações do assunto tratado com a topologia.

A terceira e a quarta secção são dedicadas ao estudo de conexões, torção e curvatura.

Postergamos deliberadamente para a última secção a introdução do conceito de métrica, de modo a deixar clara a exata dependência, ou interdependência, da métrica em relação aos demais assuntos tratados.

Na última secção é abordado também o conceito de geodésica e os problemas variacionais relacionados.

Nos cálculos de integração e derivação de campos numa variedade surgem com grande frequência campos tensoriais covariantes e antisimétricos.

Esta secção é dedicada ao estudo de tensores deste tipo, cujas marcantes propriedades de simetria permitirão a definição de uma série de operações úteis.

Definição IV - 1

Seja (M,A) uma variedade. Uma p-forma em M é um campo tensorial de tipo (o,p), totalmente antisimétrico.

Notação:

$|j_1,\ldots,j_p|$ indica uma enupla $(j_1,\ldots,j_p)$ | $i < k \rightarrow j_i < j_k$, $j_\ell \in \{1 \ldots m\}$, $(U, x) \in A$.

Sabemos do capítulo I que

$$\sum_{|j_1,\ldots,j_p|} dx_p^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_p^{j_p} \text{ , é base de } \Lambda^p T_p^* M.$$

Para não sobrecarregar a notação omitiremos, sempre que possível, os sinais de produto exterior e notaremos:

$dx^i \wedge dx^j$ por $dx^i dx^j$, e

$dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p}$, com $i < k \rightarrow j_i < j_k$, por $dx^{|j_1,\ldots,j_p|}$.

Assim uma p-forma em M pode ser sempre escrita como

$$\mu = f_{|j_1\cdots j_p|}\, dx^{|j_1\cdots j_p|} \quad , \quad \text{onde}$$

$$f_{|j_1\cdots j_p|} = \frac{1}{p!}\, \mu_{j_1\cdots j_p} = \frac{1}{p!}\, \mu\, (\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_p}).$$

Indicaremos por $\Lambda^p T^* M$ o espaço da p-formas sobre M.

Definição IV - 2

Denomina-se derivada exterior, numa variedade (M,A) a um operador:

$d: \Lambda^p T^* M \rightarrow \Lambda^{p+1} T^* M$, tal que

1) $d(\mu + \nu) = d\mu + d\nu$

2) $d\,(\mu \wedge \nu) = (d\mu) \wedge \nu + (-1)^{\ell}\, \mu \wedge d\nu$,
   onde $\mu \in \Lambda^{\ell} T^* M$

3) μ, $d(d\mu) = 0$

4) $f \in \Lambda^0 T^* M$, (campo escalr em M)
   $d(f) = df$, conforme a definição III - 22

Proposição IV - 1

Seja (M,A) variedade, $(U\ ,\ x)\ \varepsilon\ A$, $\mu\ \varepsilon\ \Lambda^p T^* M$ e $\mu|_U = dx^{|j_1 \cdots j_p|}$. Afirma-se que, em U,

$d(\ dx^{|j_1 \cdots\ j_p|}) = 0.$

Demonstração:

Provemos a proposição por indução em p:

1) Para $p = 1$, temos que
$d(dx^j) = d\ (d(x^j)) = 0$

2) Para $p > 1$, temos que
$d(dx^{|j_1 \cdots j_p|}) = d(d(\ x^{j_1} dx^{|j_2, \cdots, j_p|})) = 0,$

onde usamos que,
$d(x^j dx^{|j_2, \cdots, j_p|}) = dx^{|j_1 \cdots j_p|} + (-1)^p x^{j_1} d(dx^{|j_2 \cdots j_p|}),$

e o segundo termo se anula pela hipótese de indução.

Proposição IV - 2

O operador derivada exterior existe , é único, e se numa carta (U,x) de (M,A)

$\mu = f_{|j_1 \cdots\ j_p|}\ dx^{|\ j_1 \cdots\ j_p\ |}$, então

$$d(\mu) = d(f_{|j_1 \ldots j_p|})\, dx^{|j_1 \ldots j_p|}$$

1) unicidade

Se $\mu = f_{|j_1 \ldots j_p|}\, dx^{|j_1 \ldots j_p|}$,

$$d\mu = d\,(f_{|j_1 \ldots j_p|})\, dx^{|j_1 \ldots j_p|} + f_{|j_1 \ldots j_p|} d(dx^{|j_1 \ldots j_p|}.$$

onde o segundo termo se anula.

2) existência

Para provar a existência, provemos a compatibilidade da expressão obtida no item 1, com os quatros requisitos da definição IV - 1.

1) $d(f_{|j_1 \ldots j_p|}\, dx^{|j_1 \ldots j_p|} + g_{|j_1 \ldots j_p|} dx^{|j_1 \ldots j_p|}) =$

$$= \partial_i (f_{|j_1 \ldots j_p|} + g_{|j_1 \ldots j_p|})\, dx^i dx^{|j_1 \ldots j_p|} =$$

$$= d(f_{|j_1 \ldots j_p|} dx^{|j_1 \ldots j_p|}) + d(g_{|j_1 \ldots j_p|}\, dx^{|j_1 \ldots j_p|})$$

2) $d(f_{|j_1 \ldots j_p|}\, dx^{|j_1 \ldots j_p|} \wedge g_{|k_1 \ldots k_\ell|}\, dx^{|k_1 \ldots k_\ell|}) =$

$$= \partial_i (f_{|j_1 \ldots j_p|}\, g_{|k_1 \ldots k_\ell|})\, dx^i \wedge dx^{|j_1 \ldots j_p|} \wedge dx^{|k_1 \ldots k_\ell|} =$$

$$= \partial_i f_{|j_1 \dots j_p|} \, dx^i \wedge dx^{|j_1 \dots j_p|} \wedge g_{|k_1 \dots k_\ell|} \, dx^{|k_1 \dots k_\ell|} \; +$$

$$+ \; (-1)^p \, f_{|j_1 \dots j_p|} \, dx^{|j_1 \dots j_p|} \wedge \partial_i g_{|k_1 \dots k_\ell|} \, dx^i \wedge dx^{|k_1 \dots k_\ell|} =$$

$$= d(f_{|j_1 \dots j_p|} \, dx^{|j_1 \dots j_p|} \wedge g_{|k_1 \dots k_\ell|} \, dx^{|k_1 \dots k_\ell|} \; +$$

$$+ \; (-1)^p \, f_{|j_1 \dots j_p|} \, dx^{|j_1 \dots j_p|} \wedge d(g_{|k_1 \dots k_\ell|} \, dx^{|k_1 \dots k_\ell|}) \; .$$

3) $d(d(f_{|j_1 \dots j_p|} \, dx^{|j_1 \dots j_p|})) =$

$$= \partial_k \circ \partial_i \, (f_{|j_1 \dots j_p|}) \, dx^k \wedge dx^i \wedge dx^{|j_1 \dots j_p|} = 0$$

4) É imediata.

Proposição IV - 3

Dados (M,A) e (N,B) variedades, $F : M \to N$ e $F^*: T_p^0 N \to T_p^0 M$, afirma-se que, dados μ, ν, p-formas em N,

1) $F^*(\mu + \nu) = F^*(\mu) + F^*(\nu)$

2) $F^*(\mu \wedge \nu) = (F^*\mu) \wedge (F^*\nu)$

3) $F^*(d\mu) = d \, (F^*\mu)$

A primeira e a segunda afirmações decorrem do fato de ser F^* um homomorfismo. Provemos a terceira:

Seja $(U, x) \varepsilon A$, $(V, y) \varepsilon B$, $W \subset U \mid F(U) \subset V$ e consideremos a restrição de μ a W. Provaremos a terceira afirmação para 0-formas e 1-formas e, das afirmações anteriores, segue o caso geral.

1) Se $p = 0$, tomemos $\mu = f : N \to R$.

$$df = \frac{\partial}{\partial y^i} f \, dy^i \to$$

$$F^*(df) = \frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial y^i} dx^j = \frac{\partial(F^* f)}{\partial x^j} dx^j = d(F^* f).$$

2) Se $p = 1$, seja $\mu = f_j \, dy^j$

$$d\mu = \frac{\partial f_j}{\partial y^i} dy^i \, dy^j \to$$

$$F^* d\mu = F^*\left(\frac{\partial f_j}{\partial y^i} dy^i \wedge dy^j\right) = F^*\left(\frac{\partial f_j}{\partial y^i}\right) \wedge F^* dy^j =$$

$= F^*(df_j) \wedge F^*(d\,(y^i)) = (d\,F^*\,f_j) \wedge F^* dy^i$. Por outro lado,

$d\,(F^*\mu) = d\,(F^* f_i dy^i) = (d\,(F^* f_i)) \wedge F^* dy^i +$

$- F^* f_i \wedge d\,F^* dy^i$. Para terminar a prova basta mostrar a nulidade do segundo termo do segundo membro. Para tanto veja-se que:

$$dF^*dy^i = d\,\frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}\,dx^j = \frac{\partial^2(y^i \circ F)}{\partial x^k \partial x^j}\,dx^k \wedge dx^j = 0$$

Até agora o que fizemos foi introduzir, de maneira rigorosa, o conceito de forma e o de derivada exterior. Examinaremos agora os conceitos de forma exata e fechada e o teorema de Poincare, que é o principal resultado da secção. A prova do teorema é bastante trabalhosa, mas mesmo assim, está feita em detalhe.

Definição IV - 3

Uma p-forma μ, em (M,A), diz-se fechada sse $d\mu = 0$.

Uma $(p+1)$-forma μ, em (M,A), diz-se exata sse $\exists\, \nu \in \Lambda^p T^*M \mid \mu = d\nu$.

Teorema IV - 1 (Lema de Poincare)

Dada (M,A) variedade, temos que toda forma exata é fechada e, se M for contratível, vale a recíproca.

Demonstração:

Que toda forma exata é fechada, decorre trivialmente da definição de derivada exterior.

Provemos a segunda parte do teorema. Seja (U, x) uma carta de $M \mid P \in U$.

Pela definição de contratibilidade,

$\exists H : I \times M \to M$, $I = |0, 1|$, | Dado $P_0 \varepsilon M$

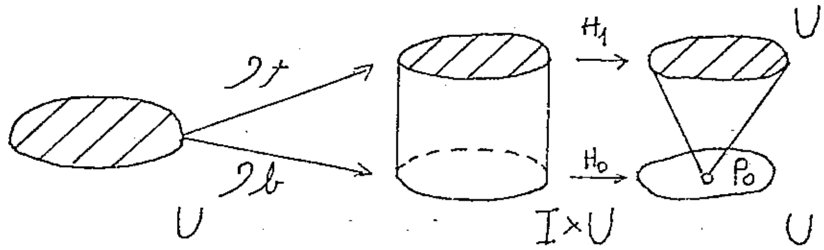
$H(0,P) = H_0(P) = P$ e $H(1,P) = H_1(P) = P_0$, $\forall P \varepsilon M$.

Consideremos agora as inclusões de U em $I \times U$, no topo e na base, como sendo

$It(P) = (1,P)$,

$Ib(P) = (0,P)$,

$P \varepsilon U$



Seja $K : \Lambda^{p+1} T^*(I \times U) \to \Lambda^p T^*U$, definidas por

1) $K(f(t,x)\, dx^{|j_1 \cdots j_{p+1}|}) = 0$

2) $K(f(t,x)\, dt dx^{|j_1 \cdots j_p|}) = (\int_0^1 f(t,x)dt)\, dx^{|j_1 \cdots j_p|}$

3) $K(\nu_1 + \nu_2) = K\nu_1 + K\nu_2$

Para provar o teorema provemos antes o seguinte lema:

$\nu \varepsilon \Lambda^{p+1} T^*(I \times U)$, $K(d\nu) - d(k\nu) = It^*\nu - Ib^*\nu$

1) ν da forma $h(t,x)dx^{|j_1 \cdots j_{p+1}|}$, em $I \times U$, temos

$K(\nu) = 0 \to d(K\nu) = 0$. Por outro lado,

$$d = \frac{\partial h}{\partial t} dt\, dx^{|j_1 \cdots j_{p+1}|} + \frac{\partial h}{\partial x^i} dx^i dx^{|j_1 \cdots j_{p+1}|} \to$$

$$K(d\nu) = \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}\, dt\right) dx^{|j_1 \cdots j_{p+1}|} + 0 =$$

$$= (h(1,x) - h(0,x)\ dx^{|j_1 \cdots j_{p+1}|} = It^*(\nu) - Ib^*(\nu)$$

2) ν da forma $h(t,x)dtdx^{|j_1 \cdots j_p|}$, em $I \times U$ temos $It^*\nu = 0$ e $Ib^*\nu = 0 \rightarrow It^*\nu - Ib^*\nu = 0$.

Por outro lado

$$d\nu = \frac{\partial h}{\partial x^i} dx^i dt dx^{|j_1 \cdots j_p|} + \frac{\partial h}{\partial t} dt dt dx^{|j_1 \cdots j_p|} =$$

$$= - \frac{\partial h}{\partial x^i} dt dx^{(i,\ j_1, \cdots j_p)}.$$

~~Logo $K(d\nu) = - \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x^i} dt\right) dx^{(i,\ j_1 \cdots j_p)}$~~.

Como $K(\nu) = \left(\int_0^1 h\ dt\right) dx^{|j_1 \cdots j_p|}$, temos que

$$d(K(\nu)) = \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x^i} dt\right) dx^{(i,\ j_1 \cdots j_p)} = -K(d\nu)$$

Assim $K(d\nu) - d(K\nu) = 0 = It^*\nu - Ib^*\nu$.

3) Do item 3 da definição de K segue o lema.

Se agora usando a notação do enunciado do teorema, tomarmos

$\nu = K\ (H^{*}\mu)$, teremos

$K(d(H^{*}\mu)) - d(K(H^{*}\mu)) = It^{*}\ 0\ H^{*}(\mu) - Ib^{*}\ 0\ H^{*}(\mu)$.

Como $H\ 0\ It = I$, a identidade, $It^{*}\ 0\ H^{*}(\mu) = \mu$.

Como $H\ 0\ Ib(P) = P_0$, função constante, $Ib^{*}\ 0\ H^{*}(\mu) = 0$.

Assim temos finalmente que

$k\ dH^{*}\mu - d\ KH^{*}\mu = \mu \quad \rightarrow$

$K\ H^{*}(d\mu) - d\ KH^{*}\mu = \mu \quad \rightarrow \quad d\ (K\ 0\ H^{*}\mu) = \mu$.

Q.E.D.

A prova do teorema está completa, pois, dada μ, fechada, $\nu = K\ 0\ H^{*}(\mu)$ e tal que $d\nu = \mu$. Notemos que ν não é a única forma com esta propriedade, pois $\forall\ W \in \Lambda^{p-1}T^{*}U$, $\mu = d\ (\ V + dW\ )$.

Antes de concluir a secção, definiremos a operação de produto interno, e listaremos algumas identidades que serão utilizadas mais tarde.

Definição IV - 4

Denomina-se produto interno a um operador $I : TM \times \Lambda^{p}T^{*}M \rightarrow \Lambda^{p-1}T^{*}M$, definido por:

1) $I(v,\mu)\ (w_1 \ldots w_{p-1}) = \mu\ (v,\ w_1, \ldots,\ w_{p-1})$

2) $I(v,f) = 0$

$\forall\ v,\ w_i$, campos em M, f, campo escalar em M, $\mu \in \Lambda^p T^* M$, $\nu \in \Lambda^\ell T^* M$.

Proposição IV - 4

Nas mesmas condições da última definição temos que

1) $I(v, \mu \wedge \nu) = I(v,\mu) \wedge \nu + (-1)^p\ \mu \wedge I(v,\nu)$

2) $L_v(\mu) = I(v,\ d\mu) = d\ I(v,\mu)$

3) $L_v(d\mu) = d\ L_v\ (\mu)$

Se tivermos ainda $\ell = 1$ e $p = 2$ temos:

4) $df(v) = v(f)$

5) $d\nu(w_1, w_2) = \frac{1}{2}\ \{ w_1(\nu(w_2)) - w_2(V(w_1)) - \mu(|w_1,w_2|)\}$.

6) $d\mu(w_1,w_2,w_3) = \frac{1}{3}\ \{w_1(\mu(w_2,w_3) + w_2\mu(w_3,\ w_1) +$

$+ w_3(\mu(w_1,w_2)) - \mu(|w_1,w_2|,\ w_3) - \mu(|w_2,w_3|,w_1) +$

$- \mu(|w_3,w_1|,w_2)$.

———————— // ————————

Nesta secção apresentamos a teoria de integração sobre uma variedade.

Devida a topologia não trivial a teoria de integração exigirá uma sofisticação a primeira vista surpreendente. Eventualmente métodos alternativos, como o método da partição da unidade* são possíveis. Usaremos aqui a definição de integral sobre cadeias singulares.

Admitimos definida em R^n a medida usual**, μ, e através dela a integral de uma função $f: R^n \to R$, num aberto $U \subset R^n$, como $\int_U f \, d\mu$.

Suporemos também conhecido o teorema da mudança de coordenadas, que nos afirma o seguinte

Teorema IV - 2

Sejam U, V abertos de R^n, $\phi : U \to V$ um difeomorfismo, e $f : R^n \to R$. Tem-se que

$\int_U f \, d\mu = \int_V (f \circ \phi) \, | J_\phi | \, d\mu$, onde J_ϕ é o jacobiano da transformação, $J_\phi = \det \left(\frac{\partial (y^1 \ldots y^n)}{\partial (x^1 \ldots x^n)} \right.$, dado $\phi \, (x^i \ldots x^n) = (y^1 \ldots y^n)$.

Definição IV - 5

Dada (M,A) variedade, duas cartas (U,x) e (V,y) ε A são ditas consistentemente orientados sse $U \wedge V = \emptyset$ ou, $U \cap V \neq 0$ e $\left| \frac{\partial (x^1 \ldots x^m)}{\partial (y^1 \ldots y^m)} \right|_P > 0, \quad \forall P \in U \cap V$.

* Veja (Lima ,76)

** Veja (Shilov ,77)

Definição IV - 6

Uma variedade (M,A) é dita orientável sse existir um atlas, $A' \subset A$, na qual todas as cartas sejam consistentemente orientadas. Diz-se então que A' define uma orientação em (M,A).

Se um atlas A'', nas mesmas condições de A', tiver suas caras consistentemente orientadas com as cartas de A' diz-se que A' e A'' tem a mesma orientação.

É fácil ver que, ter a mesma orientação, é uma relação de equivalência no conjunto dos altlas de cartas consistentemente orientadas. A cada uma das classes de equivalência assim definidas denomina-se orientaçãi de (M,A).

Vê-se ainda que, se (M,A) é orientável, existem exatamente $2k$ orientações de (M,A), onde k é o número de elementos conexos de M. Se $k= 1$, uma das orientações será dita oposta da outra.

Definição IV - 7

Dados (M,A) variedade, U aberto de M, dizemos, que dV é um elemento de volume em U sse $dV : U \to \Lambda^m T^* M$ satisfazer:

1) $dV(P) \in \Lambda^m T_P^* M$

2) $dV(P)$ for uma função contínua

3) $dV(P) \neq 0 \quad \forall\, P \in U$

Dados $(U,x) \in A$ e dV elemento volume em U dizemos que dV tem a mesma orientação que (U,x) sse $dV = f(P)dx^{|1\ldots m|}$ e $f(P) > 0$, $\forall\, P \in U$.

Se a variedade é conexa $+dV$ é a orientação definida por dV e $-dV$ é a orientação oposta.

Retomaremos agora algumas idéias do capítulo II que serão generalizadas com fins a teoria de integração.

Definição IV - 8

Dada (M,A) variedade conexa, denominamos p--simplex singular diferenciável orientado sobre M, σ^p_M a uma classe de equivalência no conjunto das aplicações singulares diferenciáveis orientados, $\{(+\sigma, \delta, \psi)\}$.

Uma aplicação singular diferenciável orientadas é uma tripla $(+\sigma, \delta, \psi)$ onde

1) $+\sigma$ é um p-simplex orientado em R^p

2) δ é o elemento de volume canonico em R^p a saber, $\delta = dy^{|1\ldots p|}$, y a aplicação identidade.

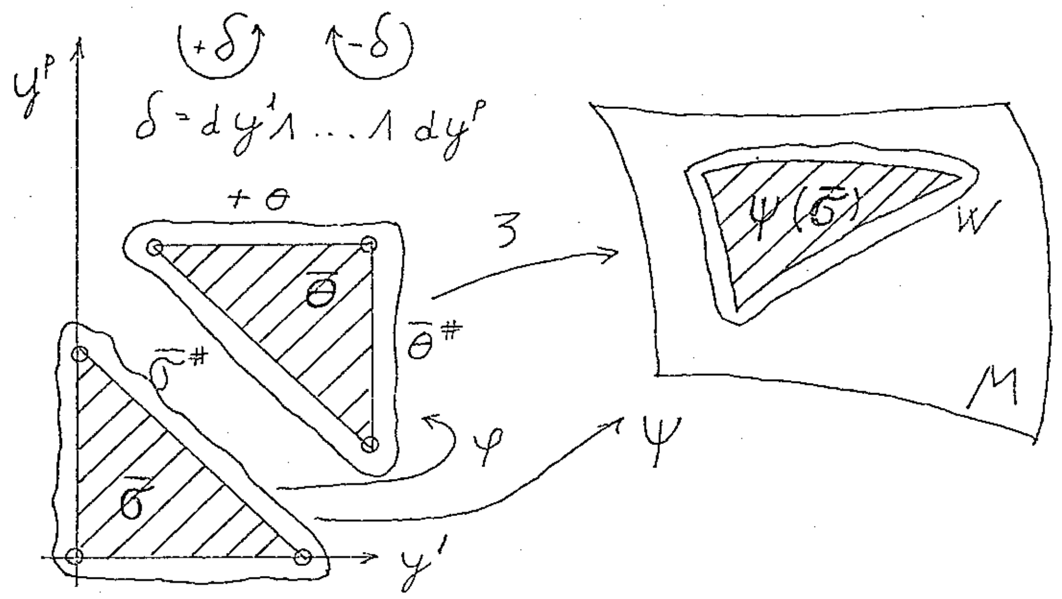
3) ψ é um difeomorfismo $\psi : \overline{\sigma}^{\#} \to W \subset M$, onde $\overline{\sigma}^{\#}$ é um aberto de $R^p \mid \overline{\sigma} \subset \overline{\sigma}^{\#}$.

Define-se finalmente a relação de equivalência por $(+\sigma, \delta, \psi) \sim (+\Theta, \delta, \xi) \leftrightarrow \exists\, \phi : \overline{\sigma}^{\#} \to \overline{\Theta}^{\#}$, difeomorfismo tal que:

1) $\psi|_{\overline{K}^k_\ell} = \xi \circ \phi|_{\overline{K}^k_\ell}$, onde ℓ é um índice para as faces de

dimensão k de σ, k ε {1, ... ,p}.

2) $+\delta = +\phi^{*}(\delta)$, isto é, ϕ preserva a orientação de R^p.



Definição IV - 9

Denomina-se p-cadeia sobre uma variedade (M,A) a soma formal

$\overset{p}{C}_{M} = a^{i}\ |(+\ \sigma_{i}, \delta\ , \psi_{i})| = a^{i}(\overset{p}{\sigma}_{M})_{i}$, $\quad a^{i}\ \varepsilon$ R onde estabelecemos que

$$|(+\ \sigma, \delta, \psi)| = -\ |(-\ \sigma, \delta, \psi)| = -\ |(+\ \sigma, -\delta\ \psi)|\ .$$

O conjunto dos p-simplexos singulares diferenciais sobre M será notado $\overset{p}{\sigma}_{M}$ e o grupo das cadeias por $\overset{p}{C}_{M}$.

<u>Definição IV - 10</u>

Dada (M,A) variedade denomina-se bordo a um operador, $\partial_p : C_M^p \rightarrow C_M^{p-1}$, definido por:

1) $\partial\, C_M^p = a^i\, \partial\, (\sigma_M^p)_i$, onde $C_M^p = a^i\, (\sigma_M^p)_i$

2) $\partial\, |(+\, S^p, \delta, \psi)| = \sum\limits_i |(+\, \Omega_i, \delta_i, \psi|_{\overline{\Omega}_i^{\#}})|$, onde

$+S^p$ é o p-simples standard de R^p,

$S^p = ((0,\ldots,0),(1,0,\ldots 0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)) =$

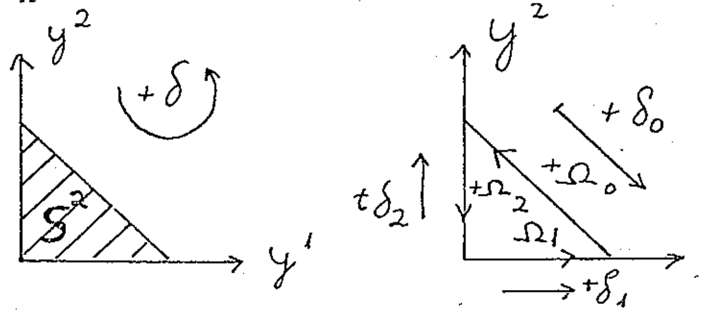
$= (a_0, a_1, \ldots, a_p)$, $a_i \in R^p$, e

$\partial\, S^p = \sum\limits_i +\, \Omega_i$, onde $+\Omega_i = (-1)^i (a_0,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_p)$, e

$\delta_i = dy^{|1\ \ldots\hat{i}\ldots\ p|}$, se $i \neq 0$ e

$\delta_0 = (-1)^{k+1}\, \delta_k$, $k \in \{1\ \ldots p\}$, se $i = 0$

exemplificando em R^2



Proposição IV - 5

A composição de dois bordos é o isomorfismo trivial, $\partial \circ \partial : C_M^p \rightarrow \{0\} \subset C_M^{p-2}$.

Estamos agora em condições de definir a integral de uma p-forma numa variedade em um simplex sobre a variedade.

Definição IV - 11

Dada (M,A) variedade, ω uma p-forma em M e $\sigma_M^p = |(+\sigma,\delta,\psi)|$ um p-simplex em M, definimos

$$\int_{\sigma_M^p} \omega \equiv \int_{\overline{\sigma}} < \psi^* (\omega) \mid \delta^* > \quad d\mu \; .$$

Proposição IV - 6

A definição de integral independe do representante.

Demonstração:

Seja $(+\sigma,\delta,\psi) \sim (+\Theta, \pm\delta,\xi)$ isto é

$\exists\, \phi : \overline{\sigma}^{\#} \to \overline{\Theta}^{\#} \mid \xi \circ \phi|_{\overline{\sigma}} = \psi|_{\overline{\sigma}}$, $+\phi^*(\pm\delta) = \delta$ e ϕ mapeia as faces de $\overline{\sigma}$ nas respectivas faces de $\overline{\Theta}$.

Como $\psi = \xi \circ \phi$, $\psi_* = \xi_* \circ \phi_*$ e $\psi^* = \phi^* \circ \xi^*$, assim $\psi^*\omega = f \,.\, \delta = \phi^*(\xi^*\omega) = \phi^*(g \,.\, \pm\delta) = (g \circ \phi)\, \phi^*(\pm\delta)$. Como ϕ preserva a orientação dada pelo elemento de volume, temos que $\pm J_\phi(p) > 0, \quad \forall\, p \in \overline{\sigma}$.

Sejam $(\bar{\sigma}^{\#},x)$, $(\bar{\Theta}^{\#},y)$, cartas de R^p dadas pela restrição da identidade. Seja ϕ da forma $y^i = \phi^i(x^1 \ldots x^p)$, temos que

$$\phi^*(\pm\delta) = \pm\phi^*(dy^{|1\ldots p|}) = \pm\phi^* dy^1 \wedge \ldots \wedge \phi^* dy^p =$$

$$= \pm\partial_i\phi^1 dx^i \wedge \ldots \wedge \partial_j\phi^p dx^j = \pm|\partial_i\phi^j| dx^{|1\ldots p|} =$$

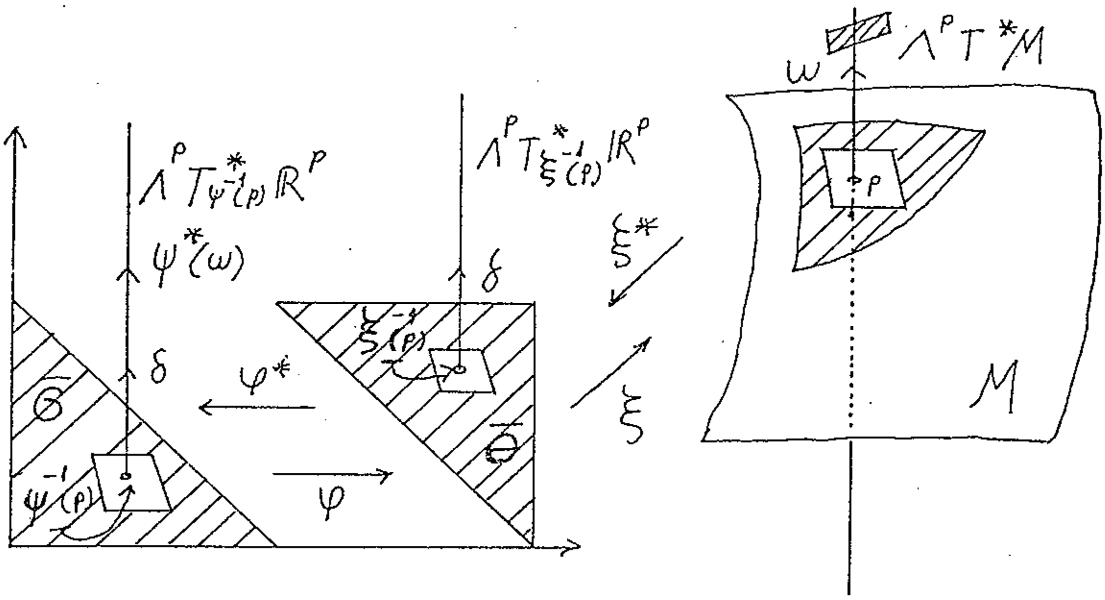
$$= \pm J_\phi \, . \, \delta \text{ , de modo que}$$

$$(g \circ \phi)\, \phi^*(\pm\delta) = (g \circ \phi) \pm J_\phi \delta = (g \circ \phi)|J_\phi|\delta = f\delta \, .$$

Usando o teorema de mudança de variáveis,

$$\int_{|(+\sigma\ \delta\ \psi)|} \omega = \int_{\bar{\sigma}} <\delta^* \mid \psi^*\omega> d\mu \quad \int_{\bar{\sigma}} f\, d\mu =$$

$$= \int_{\bar{\sigma}} (g \circ \phi)|J_\phi|\, d\mu = \int_{\bar{\Theta}} g\, d\mu = \int_{\bar{\Theta}} <\pm\delta^* \mid \xi^*\omega> d\mu = \int_{|(+\Theta,\pm\delta,\xi)|} \omega$$



A generalização para integração em cadeia é feita sem dificuldade.

Definição IV - 12

Nas mesmas condições da definição IV - 11 seja $C^p_M = a^i (\sigma^p_M)_i$, uma p-cadeia em M. Define-se

$$\int_{C^p_M} \omega \equiv \sum_i a^i \int_{(\sigma^p_M)_i} \omega \quad .$$

Deveriamos mostrar ainda que se duas cadeias C_M e D_M tem por imagem uma mesma sub-variedade L de M, as integrais em ambas as cadeias coincidem.

A prova deste fato é extremamente trabalhosa e será impossível fazê-la aqui. As idéias básicas da demonstração são a proposição IV - 6 , e o teorema da aproximação simplicial (II - 1).

Quando não nos interessar a particular cadeia (parametrização) utilizada no cálculo da integral, escreveremos $\int_L \omega$, ao invés de $\int_{C_M} \omega$ ou $\int_{D_M} \omega$.

Demonstraremos a seguir o equivalente do teorema de Stokes para variedades.

Teorema IV - 3 (Teorema de Stokes)

Dados (M,A) variedade, ω, p-forma em M, f es calar em M, C_M^{p+1} uma p+1 cadeia em M, temos:

$$\int_{\partial C_M^{p+1}} \omega = \int_{C_M^{p+1}} d\omega .$$

Para provar o teorema basta provar o caso em que C_M^{p+1} é um simplex genérico σ_M^{p+1} .

Seja $\sigma_M^{p+1} = |(S^{p+1}, \delta, \psi)|$. Pela definição de integral,

$$\int_{\partial\sigma_M^{p+1}} \omega = \sum_{\ell} \int_{\overline{\Omega}_\ell} <\delta_\ell^* | \psi^*(\omega) > d\mu \text{ , onde } \partial \overline{S}^{p+1} = \sum_{\ell} \Omega_\ell .$$

Por outro lado, $\displaystyle\int_{\sigma_M^{p+1}} d\omega = \int_{\overline{S}^{p+1}} < \delta^* | \psi^* d\omega > d\mu$.

Deve-se pois demonstrar que

$$\int_{\overline{S}^{p+1}} < \delta^* | d\psi^*\omega > d\mu = \sum_{\ell=0}^{p+1} \int_{\overline{\Omega}_\ell} < \delta_i | \psi^*\omega > d\mu . \qquad (1)$$

Seja $\psi^*\omega = A_i(P)\, dx^{|1,\ldots,\hat{i},\ldots,p+1|}$. Ter-se-á:

$$d\psi^*\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j dx^{|1\ldots\hat{i}\ldots p+1|} = \sum_i (-1)^{i+1} \frac{\partial A_i}{\partial x^i} dx^{|1\ldots p|} .$$

Por conseguinte

$$\int_{\overline{S}^{p+1}} < \delta^* | \; d\psi^* \omega > d\mu =$$

$$= \int_{\overline{S}^{p+1}} < (dx^{|1\ldots p+1|})^* | \sum_i (-1)^{i+1} \frac{\partial A_i}{\partial x^i} dx^{|1\ldots p+1|} > d\mu \qquad (2)$$

Será importante na sequência da demonstração ter em mente que

$$+ S^{p+1} = + <a_0 \ldots a_{p+1}> = <(0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0)\ldots(0,\ldots,0,1)>,$$

$$+ \Omega_i = (-1)^i <a_0,\ldots,\hat{a}_i,\ldots a_{p+1}>,$$

$$\overline{S}^{p+1} = \{ x \in R^{p+1} \mid x^j \geq 0, \sum_j x^j \leq 1 \},$$

$$\overline{\Omega}_i = \{ x \in R^{p+1} \mid x^j \geq 0, \sum_j x^j \leq 1, x^i = 0 \} \text{ se } i \neq 0 \quad \text{e}$$

$$\overline{\Omega}_0 = \{ x \in R^{p+1} \mid x^j \geq 0, \sum_j x^j = 1 \}.$$

A equação (2) pode assim ser escrita

$$\int_{\overline{S}^{p+1}} < \delta^* | \; d\psi^* \omega > d\mu = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \int_{\{x \in R^{p+1} | x^j \geq 0 \wedge \sum_j x^j \leq 1\}} (\partial A_i / \partial x^i) \; d\mu_{p+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \int_{\{x \in R^{p+1} | x^j \geq 0,\ \Sigma x^j \leq 1\ ,\ x^i = 0\}} d\mu_p \int_0^1 (\partial A_i/\partial x^i)\ d\mu_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1}(-1)^i \int_{|(+\Omega_i,\delta_i,I)|} dx^{|1\ldots\hat{i}\ldots p+1|}\ |A_i(x^1\ldots x^{i-1},1-\sum_{j\neq i} x^j,x^{i+1},\ldots x^{p+1})$$

$$- A_i(x^1\ldots x^{i-1},\ 0,\ x^{i+1},\ \ldots\ x^{p+1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} \{ - \int_{\overline{\Omega}_i} < dx^{|1\ldots\hat{i}\ldots p+1|}\ |\ \delta_i^{\ *} > |\ldots.|\quad d\mu\ =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} \{ - \int_{\overline{\Omega}_i} A_i(x^i\ldots x^{i-1},\ 1 - \sum_{j\neq i} x^j,\ x^{i+1},\ldots x^{p+1})\ d\mu\ +$$

$$+ \int_{\overline{\Omega}_i} A_i\ (x^1\ldots\ x^{i-1},\ o,\ x^{i+1},\ldots\ x^{p+1})\ d\mu\ \}.$$

Note-se ainda que

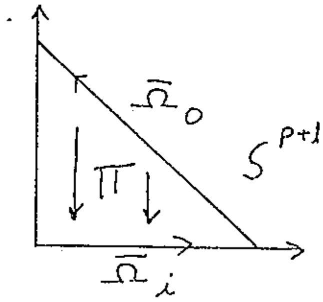
$$- \int_{\overline{\Omega}_i} A_i\ (x^1\ldots\ x^{i-1},\ 1 - \sum_{j\neq i} x^j,\ x^{i+1},\ \ldots\ x^{p+1})\ d\mu\ =$$

$$= -\int_{|(+\Omega_i,(-1)^i\delta_i,I)|} A_i\,(\ldots)\,dx^{|1\ldots\hat{i}\ldots p+1|} = -\int_{|(+\Omega_0,(-1)^i(-1)^{i+1}\delta_0,\Pi)|} A_i(x^1\ldots x^{p+1})\,dx^{|1\ldots\hat{i}\ldots p+1|} =$$

$$= \int_{\bar{\Omega}_0} \langle \delta_0^{*}|\,dx^{|1\ldots\hat{i}\ldots p+1|}\rangle\, A_i(\ldots)\,d\mu = (-1)^{i+1}\int_{\bar{\Omega}_0} A_i(x^i\ldots x^{p+1})\,d\mu.$$

Por outro lado temos que:

Na penúltima passagem, Π é a projeção de $\bar{\Omega}_0$ em $\bar{\Omega}_i$.



$$\sum_{\ell}\int_{|(+\Omega_\ell,\delta_\ell,I)|}\psi^{*}(\omega) = \sum_{\ell=0}^{p+1}\int_{|(+\Omega_\ell,\delta_\ell,I)|}\sum_{i=1}^{p+1} A_i\,dx^{|1\ldots\hat{i}\ldots p+1|} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1}\Big(\int_{|(+\Omega_0,\delta_0,\Pi)|} A_i\,dx^{|1\ldots\hat{i}\ldots p+1|} + \int_{|(+\Omega_i,\delta_i,I)|} A_i\,dx^{|1\ldots\hat{i}\ldots p+1|}\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1}\Big((-1)^{i+1}\int_{\bar{\Omega}_0} A_i\,d\mu + \int_{\bar{\Omega}_i} A_i\,d\mu\Big).$$

Comparando o desenvolvimento de ambos os membros da identidade (1) verifica-se provado o teorema.

Q.E.D.

Corolário:

Um corolário útil do teorema de Stokes é o teorema da integração por partes:

$$\int_{C_M} df \wedge \omega = \int_{\partial C_M} f\omega - \int_{C_M} f \, . \, d\omega,$$

onde f é um escalar, ω uma p-forma, e C_M uma p+1 cadeia sobre uma variedade (M,A).

Se a teoria de integração desenvolvida nesta secção tem o mérito de ser muito geral, tem também o inconveniente de ser de operação bastante trabalhosa, como deve ter ficado claro na demonstração do teorema de Stockes.

Antes de dar por encerrada a secção examinaremos, de maneira bastante informal, uma série de fatos interessantes. Estes podem ser descritos com grande simplicidade no formalismo desenvolvido.

<u>Definição IV - 13</u>

Dados (M,A) variedade, Z_M^p, uma p-cadeia em M será dito um ciclo sse $\partial Z_M^p = 0$.

A cadeia B_M^p será dito um p-bordo sse existir uma p+1 cadeia $C_M^{p+1} \mid B_M^p = \partial C_M^{p+1}$.

Dada ω, p-forma em M, define-se o período de ω no ciclo Z_M^p por:

$$\text{Per}\,(Z^p_M, \omega) = \int_{Z^p_M} \omega\ .$$

Teorema IV - 4 (Primeiro e segundo teorema de De Rham)

Nas mesmas condições da definição anterior, se ω é fechada tem-se que:

1) ω é exata $\leftrightarrow$ Z^p_M , Per $(Z^p_M , \omega) = 0$

2) Seja $\alpha : Z^p_M \to R$ uma função com argumentos nos p - ciclos em M, tal que, se $\alpha(Z^p_M)_i = \alpha_i$ e $\sum_i a^i (Z^p_M)$ é um bordo, então $\sum_i \alpha_i\ a^i = 0$.

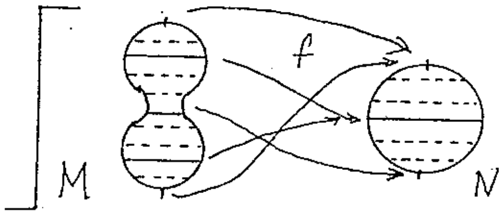
O segundo teorema de De Rahm afirma a existência de uma p-forma fechada, $\omega, |$ Per $(Z^p_M)_i\ \omega = \alpha_i$.

As próximas definições ilustram relações importantes entre sub-variedades. Para simplificar as definições tomaremos sempre sub-variedades do R^M.

Definição IV - 14

Sejam M e N duas sub-variedades orientáveis de R^n, e de mesma dimensão, p. Seja dV uma p-forma contínua em R^n e não nula em N, tal que $\int_N dV = 1$. Seja f : M $\to$ N. Definimos o grau de f por:

$$\deg(f) = \int_M f^*(dV)$$



deg(f)=2

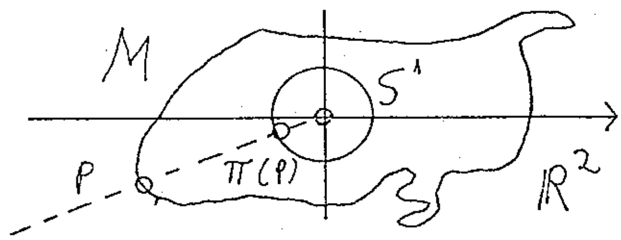
Se M e N forem compactas sabe-se que f necessariamente mapeia M um número inteiro, k, de vezes sobre N*. Neste caso deg(f) é precisamente igual a k.

Exemplo:

Seja M uma sub-variedade de $R^n - \{0\}$, S^{n-1} a esfera de raio 1, $\{x \in R^n \mid |x| = 1\}$ com a estrutura usual, e $\Pi : R^n - \{0\} \to S^n$ a projeção definida por $\Pi(x) = x/|x|$. Seja $dA = *(rdr) = *(\sum_i x^i dx^i) = \sum_i (-1)^{i+1} x^i dx^{|1 \ldots \hat{i} \ldots M|}$.

Seja $\omega = dV/A^{n-1}$, onde A^{n-1}, a área de S^{n-1} é $A^{-1} = \int_{S^{n-1}} dA$.

Tomando a restrição de Π como uma aplicação de M em S^{n-1}, temos que:



$$\deg(\Pi) = \int_M \Pi^*(\omega) = \frac{1}{A^{n-1}} \int_M \Pi^*(dA) = \frac{1}{A^{n-1}} \int_{\Pi(M)} dA =$$

---

* Veja (Seifert ,34)

$$= \frac{1}{A^{n-1}} \int_{S^{n-1}} dA = 1$$

Proposição IV - 7

Sejam M, N, L sub-variedades de R^n e $f : M \to N$, $g : N \to L$. Tem-se que:

$\deg (g \circ f) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

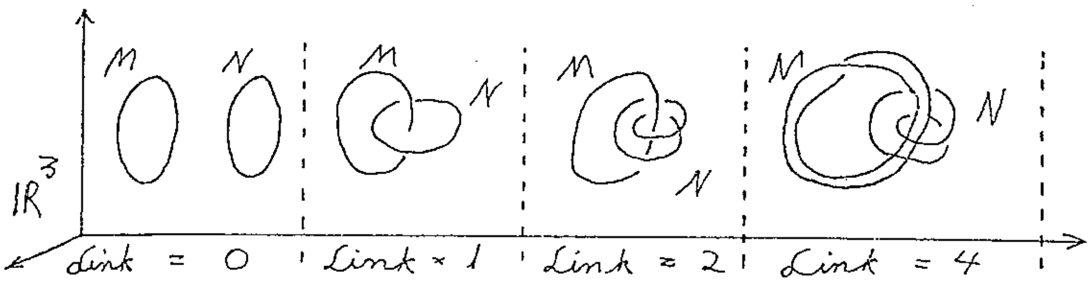
Definição IV - 15

Sejam M e N sub-variedades compactas de R^p, tais que $M \cap N = \emptyset$ e $\dim M + \dim N = p-1$.

Consideremos a variedade produto $M \times N$ e o mapa $f : M \times N \to R^p - \{0\}$ definido por $f(P,Q) = x - y$, onde $P \in M \subset R^p$ e $Q \in N \subset R^p$.

Definimos o enlançamento de M e N por:

$\text{Link}(M,N) \equiv \deg(\Pi \circ f)$, $\Pi \circ f : M \times N \to S^{p-1}$



—————— // ——————

Esta secção é dedicada ao estudo de conexões em variedades. Por não corresponder exatamente ao objetivo da dissertação, omitimos maiores referências ao desenvolvimento histórico, do conceito de conexão. Todavia, cremos que o estudo de conexões para superfícies imersas em R , de onde provem historicamente o conceito, é extremamente útil à intuição*.

Definição IV - 16

Dado $\phi : N \to M$, imersão de (N,A) em (M,B). Uma aplicação $v : N \to TM \mid \forall P \in N,\ v(P) \in T_{\phi(P)} M$, será dito um campo de vetores sobre ϕ.

Analogamente, uma aplicação $S : N \to T^r_s M \mid \forall P \in N,\ S(P) \in (T^r_s)_{\phi(P)} M$ será dita um campo tensorial de tipo (r,s) sobre ϕ.

Por comodidade consideraremos, no restante do capítulo, que os campos são sempre C^∞.

Dados R, S campos tensoriais de mesmo tipo sobre ϕ, e f um campo escalar, de tipo $(0,0)$, definimos a soma e o produto por escalar dos campos por:

1) $(R + S)(P) = R(P) + S(P)$

2) $(f \,.\, R)(P) = f \,.\, R(P)$.

O espaço dos campos vetoriais sobre ϕ, dotados destas operações, será notado $\text{camp}(\phi)$.

---

* Veja (Carmo , 76) ou (Lima, 76) ou (Stoker ,69)

Definição IV - 17

Seja como na definição anterior $\phi : N \to M$ uma imersão. Um operador

$$\nabla : TN \times camp(\phi) \to TM$$

diz-se uma conexão afim sse, $\forall\, v, w \in camp(\phi)$, $\forall\, P \in N$ $\forall\, Y, Y' \in T_P N$, $\forall$ f,g campos escalares em ϕ e $\forall\, \alpha, \beta \in R$ tem-se:

1) $\nabla_Y v \in T_{\phi(P)} M$

2) $\nabla_{(\alpha_Y + \beta_{Y'})} v = \alpha \nabla_Y v + \beta \nabla_{Y'} v$

3) $\nabla_Y (f \cdot v + g \cdot w) = f \nabla_Y v + Y(f) v + g \cdot \nabla_Y w + Y(g) w.$

O símbolo $\nabla_Y v$ se lê, derivada covariante de v em relação a Y. Se como caso particular ∇ for uma conexão definida sobre a imersão identidade de uma variedade em si mesma, $I : M \to M$, ∇ diz-se conexão em M.

Definição IV - 18

Seja $\phi : N \to M$ imersão, ϕ conexão sobre ϕ, $e_i(P)$ campos num aberto $U \subset M$ tais que $\{e_i(P)\}$ seja base de $T_{\phi(P)} M$, $\{E_k\}$ base de $T_P N$ e v um campo sobre ϕ.

Definimos os símbolos de Chistoffel, ou componentes, Γ, da conexão ∇ por

$$\Gamma^i_{jk}(P) = e^*_i(P) \mid \nabla_{E_k(P)} e_j(P) \mid \qquad \begin{array}{l} i,j \in \{ 1 \dots m \} \\ k \subset \{ 1 \dots n \} \end{array}$$

ou equivalentemente $\nabla_{E_k} e_j = \Gamma^{i}_{jk} e_i$.

Tomando campos $v(P) = f^j(P)e_j(P)$ e $Y(P) = g^k(P)E_k(P)$ tem-se:

$$\nabla_Y v = \nabla_{g^k E_k} f^j e_j = g^k (f^j \Gamma^{i}_{jk} + E_k(f^i))\, e_i .$$

A proposição seguinte mostra-nos que uma conexão não pode ser considerada como um campo tensorial. Compare-se-á com o teorema I - 1.

Proprosição IV - 8

Dado ∇ conexão em (M,A) e $\{e_i(P)\}$, $\{e'_i(P)\}$ duas bases de T_PM, para $P \in U$ aberto de M, tais que

$e'_i(P) = A(P)^j{}_i \; e_j(P)$ tem-se que, sendo

Γ e Γ' os componentes de ∇ na primeira e na segunda bases, respectivamente

$$\Gamma'^{i}_{jk} = A^i{}_\ell \, A^m{}_k \, A^m{}_j \, \Gamma^{\ell}_{nm} + A^i{}_\ell \, A^m{}_k \, e_m(A^\ell{}_j).$$

<u>Definição IV - 19</u>

Dada ∇ conexão em (M,A) e uma imersão $\phi : N \to M$, (N,B) variedade, define-se a conexão induzida sobre ϕ, $\phi^*\nabla$, da maneira seguinte:

$\forall v$ campo em $\phi(N) \subset M$, $Y \in T_P N$, $(\phi^* \nabla)_Y (v \circ \phi) \equiv \nabla_{\phi * Y} v$.

Mais geralmente, tendo-se $\phi : N \to M$, $\gamma : L \to N$, imersões e ∇ definida sobre ϕ, define-se

$$(\gamma^* \nabla)_Z (v \circ \phi \circ \gamma) \equiv \nabla_{\gamma^* Z} (v \circ \phi),$$

$\forall v \in camp(\phi)$ e $Z \in T_P L$.

Para o R^n existe uma conexão "natural" que é o gradiente dos componentes de um vetor*. A conexão induzida sobre uma superfície é obtida medindo-se a variação da projeção da derivada (no R^n) do campo projetada sobre o plano tangente.

Definição IV - 20

Dados v, campo sobre uma imersão $\phi : N \to M$, v é dito paralelo em $P \in N$ sse $\nabla_Y v = 0$, $\forall Y \in T_P N$.

Se v for paralelo em P, $\forall P \in N$, v é dito paralelo.

Para v escrito, em bases $\{e_i(P)\}$ de $T_{\phi(P)} M$ e $\{E_k\}$ de $T_P N$, como $v = f^i e_i$, a condição de paralelismo se escreve:

$$\nabla_{g^k E_k} f^i e_i = g \mid f^i \Gamma^i_{jk} + E_k(f^i) \mid e_i = 0, \quad \forall Y = g^k E_k \quad ,$$

* Veja (Stoker, 69)

donde $| f^j \Gamma^i_{jk} + E_k(f^i) | = 0$, sistema que geralmente não tem solução.

Se a imersão $\phi : N \to M$. com conexão ∇, admite ao menos um campo paralelo, a imersão é dita paralelizável.

Definição IV - 21

Uma variedade, (M,A), é dita paralelizável sse existirem $m = \dim M$ campos $e_i(P)$, C^1, sobre M tais que $\{e_i(P)\}$ seja base de T_PM, $\forall P \in M$.

O conjunto $\{e_i(P)\}$ de tais campos é denominado uma paralelização de M.

Dada uma paralelização $\{e_i\}$ de M, definimos a conexão definida pela paralelização por:

$$\nabla_Y(f^i e_i) \equiv Y(f^i) e_i \ .$$

Proposição IV - 9

Dados (M,A), (N,B) variedades, N conexa, $\phi : N \to M$ uma imersão paralelizável, ∇ conexão sobre ϕ, $v \in \text{camp}(\phi)$ paralelo e P_1, $P_2 \in N$, afirma-se :

1) v está completamente determinado pelo seu valor num ponto, $v(P_0)$, $\forall P_0 \in N$

2) O subespaço $\text{camp}(\phi)//$ de $\text{camp}(\phi)$ dos campos paralelos sobre ϕ, com a soma usual de campos e o produto usual por escalar é um espaço vetorial isomorfos a $T_{\phi(P_0)}M$.

Demonstração:

Usaremos o fato de que $\forall\, P, P_0 \in N$, $\exists\, \gamma : |0, 1| \to N$, curva em $N \mid \gamma(0) = P_0$ e $\gamma(1) = P$.

Seja $\gamma_*(t)$ dado localmente por:

$\gamma_*(t) = g^k E_k \circ \gamma$, e $v = f^i e_i$, um campo paralelo sobre ϕ.

Como v é paralelo, $|f^j \Gamma^i_{jk} + E_k(f^i)| = 0$.

Ao longo de γ o sistema se reduz a

$$0 = (f^j \Gamma^i_{jk} + E_k f^i) \circ \gamma = g^k (f^j \Gamma^i_{jk} + E_k f^i) \circ \gamma \to$$

$$- \gamma_* (f^i \circ \gamma) = g^k (\Gamma^i_{jk} \circ \gamma) (f^j \circ \gamma).$$

A última igualdade é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, e tem por conseguinte* uma e uma única solução para as condições iniciais, $(g^i \circ \gamma)(0) = f^i = e^*_i(v_{P_0})$.

Do fato da soma de soluções, ou do produto de uma solução por um escalar, ser também uma solução do sistema, decorre a segunda parte da proposição.

Definição IV - 22

Sendo $\phi : N \to M$ uma imersão paralelizável, ∇ a conexão sobre ϕ, os resultados da última proposição per-

* Veja (Oliva,73) ou (Barone,79) ou (Corduneau,71)

mitem que se defina o operador de transporte paralelo:

$$TRP_{P_0,P_1} \;:\; T_{\phi(P_0)}M \to T_{\phi(P_1)}M$$

$$X_{\phi(P_0)} \to TRP_{P_0,P_1}(X_{\phi(P_0)})$$

univocamente determinado pela condição de existência de um campo paralelo sobre a imersão, v |

$$v(P_0) = X_{\phi(P_0)} \quad e \quad v(P_1) = TRP_{P_0,P_1}(X_{\phi(P_0)}) .$$

Ainda da proposição anterior, seque que $TRP_{P_0,P_1} : T_{\phi(P_0)}M \to T_{\phi(P_1)}M$ é um isomorfismo.

O próximo passo a ser dado é extender o conceito de conexão para campos tensoriais de tipo arbitrário.

Definição IV - 23

Dados (M,A),(N,B) variedades, $\tilde{\nabla}$ uma conexão sobre uma imersão $\phi : N \to M$, definimos como extensão de $\tilde{\nabla}$, $\nabla : TN \times T^r_sM \to T^r_sM$ um operador que satisfaça, $\forall$ R, T campos tensoriais sobre ϕ:

1) $\nabla_Y v = \tilde{\nabla}_Y v$, $\forall$ v ε camp (ϕ)

2) $\nabla_Y(R \otimes T) = \nabla_Y T \otimes R + T \otimes \nabla_Y R$

3) $C^i_j \; \nabla_Y T = \nabla_Y (C^i_j T)$

Observação:

Utilizamos na definição um til, para diferenciar uma conexão de sua extensão, para maior rigor. Doravante não mais faremos esta distinção.

Proposição IV - 10

Nas mesmas condições da definição precedente, tem-se, $\forall\, \alpha, \beta \in R$, $Y, Z \in T_P N$, f, g campos escalares sobre ϕ, $\{E_k(P)\}$ base de $T_P N$, $\{e_i(P)\}$, base de $T_{\phi(P)} M$.

1) $\nabla_{\alpha Y + \beta Z} T = \alpha \nabla_Y T + \beta \nabla_Z T$

2) $\nabla_Y (fT + gR) = f \nabla_Y T + Y(f) T + g \nabla_Y R + Y(g) S$

3) $\nabla_Y f = Y(f)$

4) A extensão de uma conexão, para campos tensoriais de tipo (r,s) sobre ϕ, é única.

5) Usando $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \bar{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{j_s}\}$ como base de $T_{\phi(P)} M$, onde $\bar{e}^i = e_i^*$, sendo $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ os componentes do campo T, e $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s | k}$ os componentes de $\nabla_{E_K} T$, tem-se que:

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s | k} = E_k (T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}) + \sum_{\ell} T^{i_1 \dots i_{\ell-1}, h, i_{\ell+1}, \dots i_r} \Gamma^{i_\ell}_{hk} +$$

$$+ \sum_p T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_{p-1}, h, j_{p+1}, \ldots j_s} \Gamma^h_{j_p k} \text{ , onde}$$

$k \in \{1 \ldots n\}$, $i,j,h \in \{1 \ldots m\}$, $\ell \in \{1 \ldots r\}$, $p \in \{1 \ldots s\}$.

Para provar a última identidade basta aplicar os precedentes, e também a identidade

$\nabla_{E_k} \bar{e}^i = - \Gamma^i_{jk} \bar{e}^j$, que é obtida desenvolvendo-se :

$\nabla_{E_k} (e_i \otimes \bar{e}^i) = 0.$

Uma foram muito prática de escrever uma conexão nos é dada pela próxima definição.

Definição IV - 24

Seja $\phi : N \to M$ uma imersão, ∇ conexão sobre ϕ ,$\{e_i(P)\}$ base de $T_{\phi(P)}M$, $\{E_k(P)\}$ base de T_PN e os símbolos de Christoffel Γ, para os quais,

$\nabla_{E_k} e_j = \Gamma^i_{jk} e_i.$

Como a conexão é linear no vetor subescrito , pode-se definir 1-formas, $(W^i_j)_P : T_PN \to R \mid W^i_j(E_k)\ \Gamma^i_{jk}$, de modo que tem-se $\nabla_Y e_j = W^i_j(Y) e_i$, $\quad Y \in T_PN$.

——————— // ———————

Examinaremos nesta secção os conceitos de torção e curvatura. Como na secção precedente, o estudo de superfícies no R^M pode ajudar grandemente a intuição, e é d'on de historicamente derivam as idéias qeu abordaremos.

Definição IV - 25

Seja $\phi : N \to M$ uma imersão, ∇ uma conexão sobre ϕ ,$\{e_i(P)\}$ e $\{E_i(P)\}$ bases de $T_{\phi(P)}M$ e T_PN, respectivamente, $\bar{e}^i = e_i^*$, e W_j^i as formas de conexão.

Definem-se 2-formas de torção em N, Ω^i, por

$$\Omega^i = 2\ (d\phi^*\bar{e}^i + W_j^i \wedge \phi^*\bar{e}^j).$$

Definição IV - 26

Nas mesmas condições da definição anterior , sejam $Y, Y' \in T_PN$ e γ e γ' são campos em N que extendem Y e Y' respectivamente, isto é $\gamma_P = Y$, $\gamma'_P = Y'$. Define-se o operador de torção:

$$T : T_PN \times T_PN \to T_{\phi(P)}N, \text{ por}$$

$$T(Y, Y') = \nabla_Y(\phi_* Y') - \nabla_{Y'}(\phi_* Y) - \phi_* |Y, Y'| .$$

Proposição IV - 11

O operador de torção independe das particulares extensões tomadas na definição,e

$$T(Y, Y') = \Omega^i(Y, Y')\ e_i.$$

Demonstração:

Por definição

$$T(Y, Y') = \nabla_Y(\phi_* Y') - \nabla_{Y'}(\phi_* Y) - \phi_* \mid Y, Y' \mid$$

Usando bases $\{e_i(P)\}$ de $T_{\phi(P)}M$, $\{E_k(P)\}$ de $T_P N$, $\bar{e}^i = e_i^*$, e as proposições IV e IV - , tem-se

$$T(Y, Y') = \{Y(\bar{e}^i(\phi_* Y')) - Y'(\bar{e}^i(\phi_* Y)) +$$

$$- \bar{e}^i(\phi_* \mid Y, Y' \mid)\} e_i + \{ W^i_j(Y)\ \bar{e}^j(\phi_* Y') +$$

$$- W^i_j(Y')\ \bar{e}^j(\phi_* Y)\} e_i .$$

Usando a proposição IV - 4 , 5, vê-se que

$$\{ Y(\bar{e}^i(\phi_* Y')) - Y'(\bar{e}^i(\phi_* Y)) - \bar{e}^i(\phi_* \mid Y, Y' \mid)\} =$$

$$= 2\ d\ (\phi_* \bar{e}^i)(Y, Y').$$

Pela definição de aplicação induzida por uma imersão, definição IV - 19, tem-se,

$(\phi^* \bar{e}^i) Y = \bar{e}^i(\phi_* Y)$, de modo que

$$\{ W^i_j(Y)\ \bar{e}^j(\phi_* Y') - W^i_j(Y')\ \bar{e}^j(\phi_* Y)\} =$$

$$= 2\ W^i_j \wedge \phi^*(\bar{e}^j).\ \text{Assim}$$

$$T(Y, Y') = 2(d\phi_* \bar{e}^i + \overset{i}{W_j} \wedge \phi^* \bar{e}^j)(Y, Y')\, e_i = \Omega^i(Y,Y')\, e_i$$

Q.E.D.

Se por ventura $e_i = \partial_i$, para alguma carta (V,x) ε B, tem-se ainda que

$$d\phi^* \bar{e}^i = d\phi^* dx^i = \phi^* ddx^i = 0 \quad , \quad e$$

$$\Omega^i = 2 \overset{i}{W_j} \wedge \phi^* dx^i .$$

Se a conexão considerada for uma conexão em (M.B), ter-se-ã

$\Omega^i = 2 \overset{i}{W_j} dx^i$. Lembrando-se do comentārio que segue a definição II - 24 ,

$$T = \partial_i \otimes \Omega^i = \partial_i \otimes 2 \,\overset{i}{\Gamma}_{jk}\, dx^k \wedge dx^j =$$

$$= (\overset{i}{\Gamma}_{jk} - \overset{i}{\Gamma}_{kj})\, \partial_i \otimes dx^k \otimes dx^j \quad \varepsilon \ T^1_2 M.$$

A ūltima identidade justifica o nome de conexão simētrica a conexões de torção nula em uma variedade.

<u>Definição IV - 27</u>

Seja $\phi : N \to M$ uma imersão de (N,A) em (M,B) , ∇ conexão sobre ϕ, $\overset{i}{W_j}$ as formas de conexão para bases $\{E_k(P)\}$ e $\{ e_i(P)\}$, de $T_P N$ e $T_{\phi(P)} M$, respectivamente e $\bar{e}^i = e_i^*$. Definimos Ω^i_j, as formas de curvatura, como 2 formas em (N,A) on de:

$$\Omega^i_j \equiv 2\,(dW^i_j + W^i_h \wedge W^h_j).$$

Definição IV - 28

Nas mesmas condições da definição anterior, sejam Y, $Y' \in T_P N$, Y, Y' extensões de Y, y', $X \in T_{\phi(P)} M$, e X um campo sobre ϕ que extende X, isto é $|\ X(P) = X$.

$$R : T_P N \times T_P N \times T_{\phi(P)} M \to T_{\phi(P)} M \quad ,\text{por}$$

$$R(Y, Y', X) = \nabla_{|Y,\ Y'|_{|P}} X - \nabla_Y 0\, \nabla_{Y'} X + \nabla_{Y'}\, 0\, \nabla_Y X.$$

Proposição IV - 12

O operador de curvatura independe das particulares extensões tomadas na definição, e

$$R(Y, Y', X) = -\,\Omega^i_j\,(Y, Y')\ \overline{e}^j\,(X)\ e_i.$$

Demonstração:

Usando as propriedades da conexão, tem-se, após consecutivas substituições, que

$$R(Y, Y', x) = \{\, W^i_j\,|\ Y, Y'| - YW^i_j\,(Y') - W^i_h\,(Y)\ W^h_j\,(Y') \;+$$

Definição IV - 29

Dado (M,A) uma variedade, denomina-se métrica em M a um campo G, de tensores tipo (0,2).

Se G_P é não degenerado, $\forall$ P ε M. a métrica é dita Riemanniana.

Se G_P é definido, P ε M, a métrica é dita propriamente Riemanniana, e caso contrário, é dita pseudo--Riemanniana.

Uma variedade dotada de uma métrica (propriamente - , pseudo -) Riemanniana é dita (propriamente-, pseudo -) Riemanniana.

Definição IV - 30

Seja ϕ : N - M uma imersão de (N,A) em (M,B), e G uma métrica em M. Define-se a métrica induzida sobre a imersão, $\tilde{G}$, por

$\tilde{G} = G \circ \phi$.

Uma conexão ∇ sobre ϕ é dita compatível com G sse o campo $\tilde{G}$ é paralelo.

Proposição IV - 14

Nas mesmas condições da definição anterior , tem-se como condições equivalentes de compatibilidade:

1) Para qualquer curva $\lambda : |a, b| \to N$, $\gamma = \phi \circ \lambda$, tem-se que:

$$G(TRP_{\gamma(t),\gamma(t')}(v),\ TRP_{\gamma(t),\gamma(t')}(w)) = G(v,w),$$

$$v, w \in T_{\gamma(t)}M,\ t,\ t' \in |a, b|.$$

2) Para qualquer v, w, campos sobre ϕ,

$Y \in T_P N$, $P \in N$, tem-se

$$Y(\tilde{G}(v,w)) = \tilde{G}(\nabla_Y v, w) + \tilde{G}(v, \nabla_Y w).$$

Demonstração:

Do contrário que segue a proposição I - 24, sabia-se que uma forma bilinear

$G\ (v,w) = < v|G'(w)>$, onde se

$G = g_{ij}\ \bar{e}^i\ \bar{e}^j$, onde $\{e_i\}$ é uma base $\bar{e}^i = e_i^*$ e $w = W^i e_i$,

$G'(w) = g_{ij} < w \mid \bar{e}^i > \bar{e}^j = g_{ij} W^i \bar{e}^j$. Assim

$G(v,w) = C_1^1\ v \otimes G'(w)$ é uma forma de escrever a métrica como uma contração.

Usando o fato da derivada covariante comutar com contrações, tem-se:

$$Y(G(v,w) = \nabla_Y(G(v,w)) = \nabla_Y\ C_1^1\ v \otimes G'(w) =$$

$$= C_1^1\ (\nabla_Y v) \otimes G'(w) + C_1^1\ v \otimes \nabla_Y G'(w) = G(\nabla_Y v, w) +$$

$$+ Y'W^i_j(Y) + W^i_h(Y')\ W^h_j(Y)\}\ \bar{e}^j(x)\ e_i .$$

A proposição IV - 4 ,5 completa a demonstração.

Se ∇ é uma conexão em (M,B) e $e_i = \partial_i$, numa carta $(V,x) \in B$,

$$W^i_j = \Gamma^i_{j\ell}\ dx^\ell, \text{ e, } dW^i_j = (\partial_k \Gamma^i_{j\ell})\ dx^k \wedge dx^\ell =$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_k \Gamma^i_{j\ell} - \partial_\ell \Gamma^i_{jk})\ dx^k \otimes dx^\ell. \text{ Também,}$$

$$W^i_m \wedge W^m_j = \frac{1}{2} (\Gamma^i_{mk}\ \Gamma^m_{j\ell} - \Gamma^i_{m\ell} - \Gamma^m_{jk})\ dx^k, dx^\ell.$$

Pelo comentário que segue a definição I - 24 podemos escrever

$$R = - e_i \otimes \bar{e}^j \otimes \Omega^i_j \text{ , que tem componentes}$$

$$R^i_{jk\ell} = \partial_\ell\ \Gamma^i_{jk} - \partial_k\ \Gamma^i_{j\ell} + \Gamma^i_{m\ell}\ \Gamma^m_{jk} - \Gamma^m_{mk}\ \Gamma^m_{j\ell} .$$

Proposição IV - 13

Se ∇ é uma conexão em uma variedade, (M,B), e T,R são os operadores de torção ẽ curvatura tem-se as seguintes identidades para suas componentes, conforme a definição:

1) $$\sum_{\pi_C(j,k,\ell)} R^i_{jk\ell} = \sum_{\pi_C(j,k,\ell)} (T^i_{\ell j|k} - T^m_{kj} T^i_{m\ell})$$

esta identidade é conhecida como a "primeira identidade de Bianchi". (π_C indica as permutações ciclicas).

2) $$\sum_{\pi_C(k,\ell,m)} R^i_{jk\ell|m} = \sum_{\pi_C(k\ \ell\ m)} T^h_{k\ell} R^i_{jh\ell}$$

que é a "segunda identidade de Bianchi".

Se, em particular, estiverem tomando as componentes numa base $\{ e_i(P) \}$, com $e_i = \partial_i$, para alguma carta $(U,x) \in B$, e $T = 0$, tem-se

3) $$R^i_{jk\ell} = - R^i_{j\ell k}$$

4) $$\sum_{\pi_C(jk\ell)} R^i_{jk\ell} = 0$$

5) $$\sum_{\pi_C(k\ell m)} R^i_{jk\ell|m} = 0$$

——————— // ———————

Nesta secção examinaremos os conceitos de métrica e geodésicas numa variedade. Postergamos deliberadamente a introdução do conceito em métrica, com a intenção de aclarar a exata interdependência de muitos conceitos em relação a métrica.

$$+ C_1^1 \; v \otimes (\nabla_Y g_{ij}) \, w^i \bar{e}^j + C_1^1 \; v \otimes g_{ij} \nabla_Y w^i \bar{e}^j) =$$

$$= G(\nabla_Y v, w) + (\nabla_Y G)(v,w) + G(v,w).$$

Demonstramos assim a segunda parte do teorema.

Demonstraremos agora que a segunda hipótese implica na primeira. Sejam $v(t)$ e $w(t)$ campos paralelos sobre $\gamma(t)$. Tem-se que

$$\frac{d}{dt} G(v(t),w(t)) = \nabla_{\gamma_*(t)} G(v(t),w(t)) = G(\nabla_{\gamma_*(t)} v(t), w(t)) +$$

$$+ G(v(t), \nabla_{\gamma_*(t)} w(t)) = 0, \text{ pois } \nabla_{\gamma_*(t)} v(t) = \nabla_{\gamma_*(t)} w(t) = 0 .$$

Portanto $G(v(t),w(t))$ é constante sobre $\gamma(t)$.

Que a primeira hipótese implica na compatibilidade, o que termina a demonstração, vê-se tendo em mente a interpretação geométrica da derivação covariante que demos na pag IV -.

<u>Teorema IV - 5 (Teorema fundamenteal da geometria Riemanniana)</u>

Para toda variedade Riemanniana há uma e uma única conexão na variedade, de torção nula e compatível com a métrica.

Demonstração:

Sejam x,v,w campos em M, (M,A) variedade. Pela segunda parte da proposição anterior, e pela definição de torção, temos imediatamente as identidades:

1) $G(\nabla_{x_p} v,w) = -G(v,\nabla_{x_p} w) + x_p\, G(v,w)$

2) $\nabla_x w = \nabla_w x + |x,w|$

3) $G(\nabla_w x,v) = -G(x,\nabla_w v) + wG(x,v)$

4) $\nabla_w v = \nabla_v w + |w,v|$

5) $G(\nabla_v w,x) = -G(w,\nabla_v x) + vG(w,x)$

6) $\nabla_v x = \nabla_x v + |v,x|$

Usando-se, nesta ordem, as seis identidades , obtemos:

7) $G(\nabla_x v,w) = \frac{1}{2} \{ xG(v,w) - wG(x,v) + vG(w,x) +$

$- G(x,|v,w|) + G(v,|w,x|) + G(w,|x,v|) \}.$

Como os campos x,v,w são arbitrários está provada a unicidade da conexão. Devemos agora provar que o operador determinado pela identidade 7 é realmente uma conexão, que é compatível com a métrica, e que tem torção nula.

Da identidade 7 deduz-se que

8) $G(\nabla_x v,w) + G(\nabla_x w,v) = xG(v,w)$

9) $G(\nabla_x v,w) - G(\nabla_v x,w) = G(w,|x,v|).$

Da segunda parte da proposição anterior, vê-se que a identidade 8 implica na compatibilidade e, pela definição de torção, que a identidade 9 implica na simetria da conexão (T = 0).

Pelas propriedades da derivada de Lie, temos as identidades, $\forall$ x,v,w,Z, campos em M:

10) $|x + v,\ w + Z| = |x,w| + |x,Z| + |v,w| + |v,Z|$

11) $|fv + gw| = fg\ |v,w| + f(v(g))\ w - g(w(f))v.$

Com auxílio das identidades 7,10,11 verificam-se, sem dificuldade, os requisitos da definição de conexões.

Q.E.D.

Finalizando nosso estudo dos conceitos de torção e curvatura em variedades Riemannianas daremos algumas definições de interesse mais técnico que conceitual.

Definição IV - 31

Seja (M,A) variedade, G uma métrica em M, ∇ a conexão compatível com a métrica, $(U,x) \in A$, ∂_i os respectivos vetores coordenados e g_{ij} os componentes de G na base canonica.

Define-se como símbolos de Christoffel de primeira espécie a:

$$|\,ik\,,\ell\,| \equiv G(\nabla_{\partial_i}\ \partial_k,\ \partial_\ell),$$

e como símbolos de Christoffel de segunda espécie a:

$$\left\{{j \atop ik}\right\} \equiv g^{j\ell}\ |ik,\ell|, \text{ onde } (g^{j\ell}) = (g_{j\ell})^{-1}$$

Proposição IV -15

Nas mesmas condições da última definição tem-se que:

$$\left\{{i \atop jk}\right\} = - \Gamma^{i}_{jk}$$

Por conseguinte:

$$\Gamma^{i}_{jk} = -g^{i\ell}|jk,\ell| = \frac{1}{2} g^{i\ell} (\partial_k g_{j\ell} + \partial_j g_{kj} + \partial_\ell g k_j).$$

A última identidade é conhecida como a Equação de Levi-Cinita.

<u>Definição IV - 32</u>

Dada M, variedade Riemanniana, ∇ conexão compatível com a métrica G de M, definimos o tensor de curvatura:

$\underline{R} : T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \to R,$ onde

$\underline{R}(v,w,y,z) = G(R(v,w,y),z).$

Proposição IV - 16

Empregando a mesma notação da proposição IV - 12, tem-se

1) $R_{ijk\ell} = g_{im} R^{m}_{jk\ell}$

2) $\underline{R}(v,w,y,z) = -\underline{R}(w,v,y,z)$

3) $\underline{R}(v,w,y,z) = \underline{R}(y,z,v,w)$

4) $\underline{R}(v,w,y,z) + \underline{R}(w,y,v,z) + \underline{R}(y,v,w,z) = 0$

Nas mesmas condições da proposição IV - 31 , tem-se portanto

5) $$-R^{i}_{jk\ell} = \partial_{\ell}\Gamma^{i}_{kj} - \partial_{k}\Gamma^{i}_{j\ell} + \Gamma^{i}_{m\ell}\Gamma^{m}_{kj} - \Gamma^{i}_{mk}\Gamma^{m}_{\ell j}.$$

A segunda parte desta secção é dedicada ao estudo de curvas extremais e, em especial, as geodésicas de uma variedade.

Definição IV - 33

Dada uma curva $\gamma : |a,b| \to M$, (M,A) variedade, define-se o levantamento de γ, $\tilde{\gamma}$, por

$\tilde{\gamma} : |a,b| \to TM \times R$, onde

$\tilde{\gamma}(t) = ((\gamma(t), \gamma_*(t)),t)$.

Definição IV - 34

Denomina-se lagrangeana a uma função C^1, no fibrado do tangente a uma variedade (M,A).

$L : TM \times R \to R$

Definição IV - 35

Dado $\gamma : |a,b| \to M$, (M,A) variedade, denomina-se variação de γ a uma função diferenciável

$\nu : |a,b| \times |-E, +E| \to M$ tal que, $s \in |-E,E|$,

$\nu(t,0) = \gamma(t)$, $\nu(a,s) = \gamma(a)$ e $\nu(b,s) = \gamma(b)$.

Notaremos por $\tilde{\nu}(s,t)$ o levantamento de $V(s,t)$

considerado como curva no parametro t.

Definição IV - 36

Dado $\gamma(t)$, curva de $|a,b|$ em (M,A) e L uma lagrangeana em M, define-se a integral lagrangeana por:

$$\mathrm{Int}(L,\gamma) \equiv \int_a^b L \circ \tilde{\gamma}(t)\, dt$$

Uma curva $\gamma(t)$ diz-se extremal, em relação a uma dada lagrangeana L, sse, para qualquer variação $\nu(t,s)$, de $\gamma(t)$, verificar-se:

$$\frac{d}{ds} \left| \mathrm{Int}\,(L, \tilde{\nu}) \right|_{s=0} = 0.$$

Proposição IV - 17

Nas mesmas condições da definição anterior, sendo (U,x) carta de M, verificam-se as condições de Euler-Lagrange, isto é, $\gamma(t)$ é uma curva extremal sse:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right), \quad \text{onde}$$

$$L\,(x^1,\ldots,x^m, \dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^m,t) = L \circ \tilde{\gamma}(t), \text{ e } \dot{x}^i = \frac{d}{dt}\, x^i.$$

Definição IV - 37

Dada uma curva $\gamma : |a,b| \to (M,A)$, G uma métrica Rienanniana em M, define-se a energia de γ pela integral lagrangeana

$E(\gamma) = Int(e , \gamma)$, onde a lagrangeana é dada por

$e((\gamma(t),\ \gamma_*(t),t) = G(\gamma_*(t),\ \gamma_*(t))$.

Se G for propriamente Riemanniana define-se também o comprimento de γ, por

$|\gamma| = Int(c,\gamma)$, onde

$c((\gamma(t),\gamma_*(t)),t) = \sqrt{|G(\gamma_*(t),\ \gamma_*(t)|}$.

~~Uma curva~~ $\gamma(t)$, para a qual $G(\gamma_*(t),\gamma_*(t) = \alpha$, $\alpha \in R$, $\forall\ t \in |a,b|$ é dita uma curva de velocidade constante. Se $\alpha = 1$ a curva é dita parametrizada pelo comprimento do arco.

Proposição IV - 18

1) O comprimento de uma curva é invariável por qualquer mudança de parametrização, isto é, dadas

$\gamma : |a,b| \to M$, $\lambda : |c,d| \to M$, curvas em (M,A) e o difeomorfismo $p : |a,b| \to |c,d|$, tem-se que $\gamma = \lambda\ 0\ p \to c(\gamma) = c(\lambda)$

2) Para curvas de velocidade constante a energia é invariante por reparametrizações que mantenham a velocidade constante.

Definição IV - 38

Seja (M,A) uma variedade propriamente Riemanniana de métrica G e $P,Q \in M$. Define-se a distância entre P e Q:

$D(P,Q) : M \times N \to R^{\#}$ por

$$\left.\begin{array}{l} 1)\quad D(P,Q) = \mathrm{Int}_{\beta}|\gamma|, \text{ se } \beta \neq \emptyset \\ 2)\quad D(P,Q) = \infty, \text{se } \beta = \emptyset \end{array}\right\} \text{ onde}$$

β é o conjunto de todoas as curvas $\lambda: |0,1| \to M$ tais que $\gamma(0) = P$ e $\gamma(1) = Q$.

Proposição IV - 19

Nas mesmas condições da definição anterior verificam-se as propriedades:

1) Se M é conexo , $D(P,Q) < \infty$

2) $D(P,Q) \geq 0$

3) $D(P,Q) = D(Q,P)$

4) $D(P,Q) + D(Q,R) \geq D(P,R)$

5) $D(P,Q) = 0 \leftrightarrow P = Q$

Definição IV - 39

Dados (M,A) uma variedade Riemanniana, ∇ a conexão compatível com a métrica G em M, uma curva $\gamma : |a,b| \to M$ diz-se uma geodésica sse:

$$(\gamma^* \nabla)_{\frac{d}{dt}} (\gamma_*(t)) = 0, \text{ ou seja,}$$

o campo dos vetores velocidade é paralelo em γ, considerada como imersão, em relação a conexão induzida sobre γ pela conexão ∇, compatível como a métrica G.

Proposição IV - 20

Nas mesmas condições da definição anterior , seja $(U,x) \in A$, Γ^i_{jk} os símbolos de Christoffel da conexão ∇ na base canonica e as funções $f^i = x^i \circ \gamma = \pi^i \circ x \circ \gamma$. Afirma-se que $\gamma(t)$ é uma geodesica sse:

$$\frac{d^2 f^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{df^j}{dt} \frac{df^k}{dt} = 0$$

Dado $P \in U$, afirmamos a existência de um aberto $W \subset T_PM$ tal que $0 \in W$ e $v \in W$, existe uma única geodesica

$\gamma : |0,1| \to M \mid \gamma(0) = P$ e $\gamma_*(0) = v$.

Define-se,nestas condições, a aplicação exponencial,

$\exp_P : W \subset T_PM \to M$, onde

$\exp(v) = \gamma(1)$

Afirma-se também, que exp : $W \to M$ é um difeomorfismo.

Definição IV - 40

Nas condições da última proposição uma carta $(U,\phi^{-1}) \in A$ diz-se coordenada normal em P sse $\phi: R^m \to M$ é dada por

$\phi\ (\alpha^1,\ldots,\ \alpha^m) = \exp_P(\alpha^1 \partial_1,\ldots,\alpha^m\ \partial_m)$, ou

para $v = \alpha^i v_i$, $\exp(v) = \phi\ (\alpha^1\ \ldots\ \alpha^m)$.

Proposição IV - 21

Sejam $P,Q \in M$, (M,A) variedade Riemanniana e $\gamma : |0,1| \to M \mid \gamma(0)$ e $\gamma(1) = Q$, geodesica.

Verifica-se que γ é extremal em relação a energia, e se a variedade for propriamente Riemanniana, também ao comprimento.

CAPÍTULO V

Neste capítulo pretende-se dar alguns exemplos de aplicação, da linguagem geométrica desenvolvida nos capítulos precedentes, à física.

Ao longo de todo o capítulo faz-se a axiomatização da relatividade geral.

O capítulo foi dividido em duas secções. Cada qual se estrutura na análise de um conceito , da axiomatização de uma parte da teoria e da solução de um problema.

Na primeira secção axiomatizam-se as noções relacionadas ao conceito de espaço-tempo. O problema principal é o da sincronizabilidade de sistemas de referência.

Na segunda secção axiomatizam-se os conceitos relacionados a distribuição de matéria e de carga. O problema base e o teorema da conservação da energia.

As diretrizes básicas para a estruturação do capítulo foram as de, proceder a axiomatização da teoria de uma maneira sucinta, e a de apresentar um problema que ilustrasse a utilidade e elegância da linguagem, evitando porém cálculos trabalhosos.

Cremos que os problemas escolhidos, por apresentarem uma certa dificuldade conceitual, embora de solução não trabalhosa atendem os critérios propostos.

Na relatividade geral são de fundamental importância dois tensores obtidos por contração do tensor de curvatura, o tensor de Ricci e a curvatura escalar.

Embora sejam várias as definições do tensor de curvatura e do tensor de Ricci, usado na literatura física, todos são equivalentes a menos de uma mudança de si nal.

Notaremos por (M,A,g) uma variedade Lorentziana dotada da métrica g, onde $g = g_{ij}\bar{e}^i \otimes \bar{e}^j$, $\{e_i\}_P$ uma base de T_PM, $\bar{e}^i = e_i^{*ij}$, $e^i = g^{ij}e_j$ e $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

O tensor de curvatura, R, é dado por

$$R(w,x,y,z) = w(\nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{|x,y|} z) =$$

$$= R^i_{jk\ell}\ e_i \otimes \bar{e}^j \otimes \bar{e}^k \otimes \bar{e}^\ell$$

Definição V - 1

Por condições acima define-se o tensor de Ricci,

$Ric : T_PM \times T_PM \to R$, por

$Ric = - C^1_1 R$, ou seja

$Ric\ (V,v) = - \Sigma\ R\ (\bar{e}^i, e_i, V, v)$, em componentes

$Ric = Ric_{ij}\ \bar{e}^i \otimes \bar{e}^j$, onde $Ric_{ij} = - R^k_{kij}$.

Define-se também a curvatura escalar,

$S : M \to R$, por

$S = g^{ij}(Ric)_{ij}$,

Define-se o tensor de Einstein

$$G = Ric - \frac{1}{2} S\ g.$$

No comentário que segue a proposição I - 25, havíamos visto que a uma métrica, está naturalmente associado a um isomorfismo entre o espaço vetorial e seu dual. Este isomorfismo, que denominamos isomorfismo métrico, associa a um tensor R, de tipo (p,q), um outro tensor T, de tipo (p-1, q + 1), por

$$T = T^{i_1 \dots i_{p-1}}_{i_p, j_1 \dots j_q} (e_1 \dots e_{p-1}, \phi(e_p), \bar{e}^{j_1}, \dots \bar{e}^{e_q}) =$$

$$= T^{i_1 \dots i_{p-1}}_{i_p, j_1, \dots j_q} (e_1 \dots e_{p-1}, e^p, \bar{e}^{j_1}, \dots, \bar{e}^{j_q})$$

onde $T^{i_1 \dots i_{p-1}}_{i_p, j_1 \dots j_q} = R^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$.

Dois tensores R,T, nestas condições, serão ditos fisicamente equivalentes. É fácil ver que ser fisicamente equivalente é uma relação que equivalência entre os elementos dos espaços $(T^r_s)_p M$ e $(T^p_q)_p M$ sse $(r + s) = (p + q)$.

Temos então que a curvatura escalar é o traço do tensor de tipo (1,1) fisicamente equivalente ao tensor de Ricci.

<u>Definição V - 2</u>

Uma métrica g, num espaço vetorial V, é dita

Lorentziana sse dim $V \geq 2$ e $I(g) = 1$.*

Uma variedade (M,A), dotada de uma métrica g, onde g_p é Lorentziana $\forall\, p \in M$, é dita uma variedade Lorentziana.

A relatividade geral é uma teoria que retrata as propriedades físicas do espaço-tempo como propriedades geométricas de uma variedade Lorentziana.

No restante da secção examinaremos em detalhe as métricas e variedades Lorentzianas, procurando relacionar alguma de suas propriedades como a natureza espaço-tempo físico.

Definição V - 3

Dado V, espaço vetorial e g - métrica Lorentziana em V, define-se o caráter causal de um subespaço W de V como sendo:

1) de tipo espaço, sse $g|W$ for positivo definida.

2) de tipo luz, sse $g|W$ for positiva semidefinida.

3) de tipo tempo, se W não for de tipo espaço nem de tipo tempo.

Um vetor $v \in V$ é dito de tipo espaço, tipo luz, ou tipo tempo sse $x \neq 0$ e $g(x,x) > 0$, $= 0$, < 0. Se $v = 0$ é de tipo espaço. v é causal sse não é de tipo espaço.

O conjunto dos vetores tipo luz em V é denominado cone de luz.

---

* Veja Definição I - 34

Proposição V - 1

Nas mesmas condições da definição anterior, tem-se :

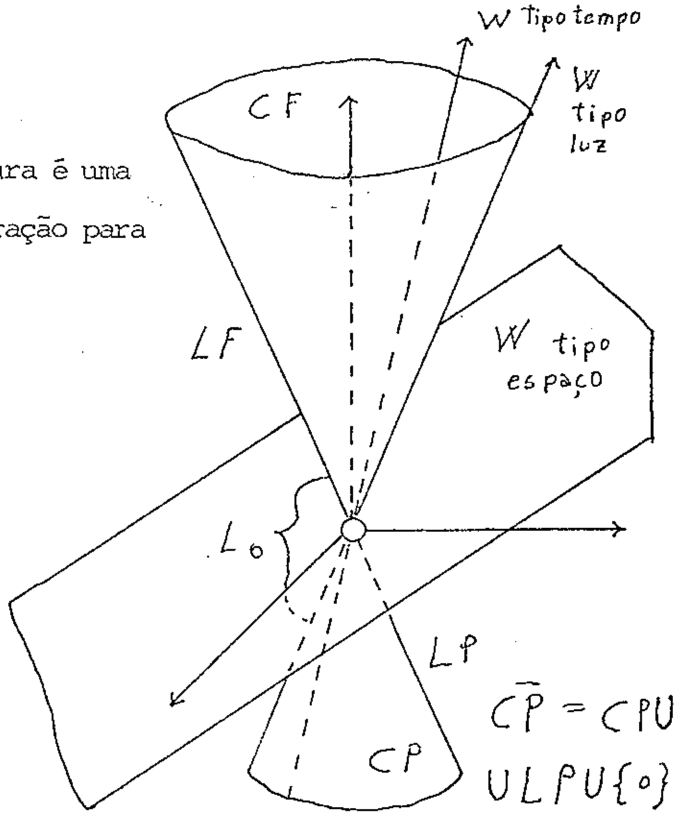
1) W é de tipo espaço $\rightarrow$ $W^{\perp}$ é de tipo tempo

2) W é de tipo luz $\rightarrow$ $W^{\perp}$ é de tipo luz $\rightarrow$ $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$

3) dado x,y, vetores tipo luz, $g(x,y) = 0 \rightarrow x = \alpha y$, $\alpha \in R$

4) O cone de luz em V, L_0 ou $L_0(V)$, e uma subvariedade de V. Tem-se ainda que L_0 tem exatamente 2 componentes conexas. Cada qual difeomorfo a $S^{m-2} \times R$, onde $m \geq 3$ é a dimensão de V e S^p é a esfera de raio unitário em R^{p+1}.

A figura é uma ilustração para V = 3



Analogamente CF e CP são as duas componentes conexas em que estão os vetores tipo tempo, sendo $LF \subset \overline{CF} - \{0\}$, e $LP \subset \overline{CP} - \{0\}$ e $C_0(V)$, ou C_0 dado por $C_0 = CF \cup CP$

A uma das componentes de L_0 notar-se-á LF, e a outra LP. Finalmente L F e L P representam, respectiva -

mente os fotons possivelmente emitidos, ou absorvidos em P, se $V = T_P M$.

Definição V - 4

Seja a variedade Lorentziana e conexa, (M,A) de métrica g.

Seja $CM \subset TM$, $CM = \bigvee_{P \varepsilon M} C_0(T_P M)$, com a estrutura induzida. M é dita temporalmente orientável sse LM tiver duas componentes conexas.

Proposição V - 2

Nas mesmas condições da definição anterior CM tem uma ou duas componentes conexas.

Demonstração:

Seja $Q : TM \to R$ a forma quadrática $Q_P(v) = g(v,v)$. Como Q é continua, $Q^{-1}(\ ]\infty, 0[\ ) = M$ é um aberto em TM. Seja CP uma das componentes conexas de CM, $\psi\ CM \to CM$ definida por $\psi(CP,v) = (P, -v)$ e $CF = \psi(|P)$. Como ψ é um homeomorfismo, CF é também uma componente conexa de CM. Para demonstrar a proposição mostraremos que $CM = CP \cup CF$.

Seja Π a projeção canonica de $TM \to M$ e os abertos de TM, $A = CP \cup CF$ e $B = CM - A$.

Suponha-se que $P \varepsilon \Pi A \wedge \Pi B$, isto é, (P,x), $(P,y) \mid (P,x) \varepsilon A$ e $(P,y) \varepsilon B$. Seja C^+ aquela das duas componentes conexas de $C_0(T_PM)$ | $y \varepsilon C^+$. Pela definição de B, $C^+ \subset B$, e ainda, ou $(P,x) \varepsilon C^+$ ou $(P.-x) \varepsilon C^+$. Assim $A \cap C^+ \neq \emptyset$ e portanto $C^+ \subset A$, donde $A \cap B \neq \emptyset$, o que é absurdo. Conclue-se que $\nexists P \varepsilon \Pi A \quad \Pi B$.

Como $\Pi A \cup \Pi B = M$, $\Pi A \cap \Pi B = \emptyset$, M é conexo e $\Pi A \neq \emptyset$, tem-se $\Pi B \neq \emptyset \rightarrow B = 0 \rightarrow CM = CP \cup CF$.

Se $CP \cap CF = \emptyset$, CM tem duas componentes conexas. $CP|_P$ será denominado cone do passado em P e $CF|_P$, o cone do futuro. Se $CP \cap CF \neq \emptyset$ CM tem uma única componente conexa.

Definição V - 5

Uma variedade Lorentziana, que indicaremos (M,A,g), M conexa, será dita temporalmente orientável sse, usando a notação da proposição anterior, CM tem duas componentes conexas.

Uma variedade Lorentziana conexa, orientável e temporalmente orientável será denominada espaço-tempo.

Definição V - 6

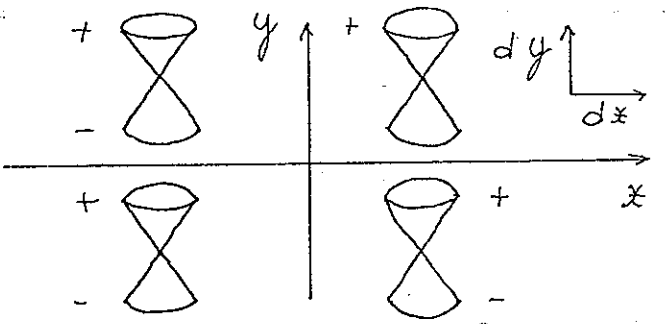
Uma variedade Lorentziana, conexa, orientável, temporalmente orientável e quadridimensional denomina-se um espaço tempo.

Um vetor $v \in TM$, (M,A,g) temporalmente orientável $|$ $g(v,v) \leq 0$ e $v \neq 0$, será dito no sentido do futuro, sse $v \in \overline{CF}$, o fecho da componente CF. Analogamente sse $v \in \overline{CP}$, será dito no sentido do passado.

A última proposição é conceitualmente importante, pois torna claro se e como podemos extender globalmente as idéias futuro e passado, a princípio locais. Embora simples, a demonstração desta proposição exige a colocação do problema na linguagem da moderna geometria diferencial.

Os exemplos seguintes ilustram o conceito de orientabilidade temporal.

1) Seja (M,A,g) dado por $M = R^2$, A a estrutura usual e $g = dx \otimes dx - dy \otimes dy$, onde (x,y) são as coordenadas cartesianas de R^2.



Interessantes aspectos históricos deste exemplo podem ser encontrados em (Bonola,12). A generalização deste exemplo para o caso quadridimensional, com $g = \sum_{i=1}^{3} dx^i \otimes dx^i - dx^4 \otimes dx^4$, e denominada espaço tempo de minkoniski.

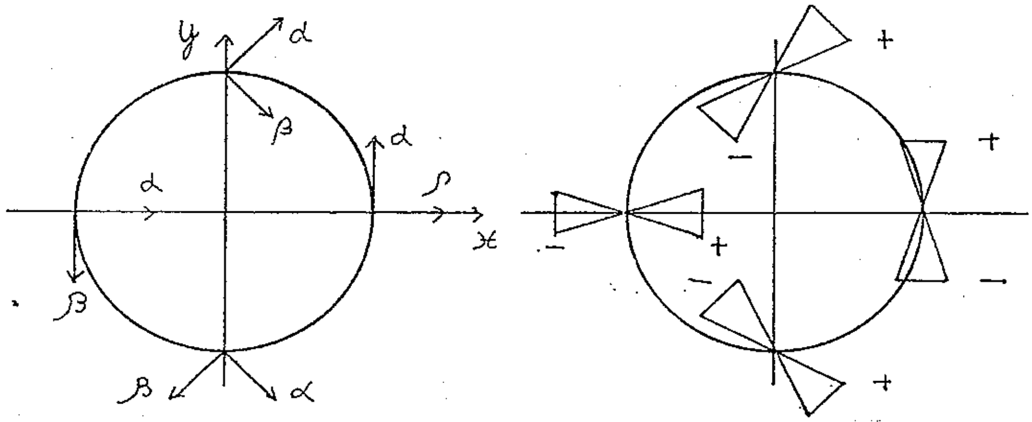
2) Seja (M,A,g) dado por $M = R^2 - \{0\}$, com a estrutura usual. Sejam (ρ, θ) coordenada cilíndrica de R^2,

$$\alpha = \rho(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} dx + \cos \frac{\theta}{2} dy),$$

$$\beta = \rho(\cos \frac{\theta}{2} dx - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} dy), \text{ e}$$

$g = -\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta$.

Este é um exemplo de uma variedade Lorentzia na, conexa, orientável e não temporalmente orientável.



As próximas definições referem-se ao conceito de observador. Através destas definições poderemos retratar u ma observação, ou medida, ou evolução temporal de um fenomeno, no mundo físico.

Definição V - 7

Dado (M,A,g),espaço tempo, denomina-se observa dor instantâneo a um ponto $(P,v) \in TM$, tal que v seja tipo tempo, no sentido futuro e normalizado, isto é, tal que $\| v \| = 1$.

Seja (P,v) um observador instantâneo. A decom posição $T_pM = T \oplus E^*$, onde T é subespaço gerado por v e E é o subespaço perpendicular a v, é a decomposição canonica de T_pM para o observador instantâneo (P,v).

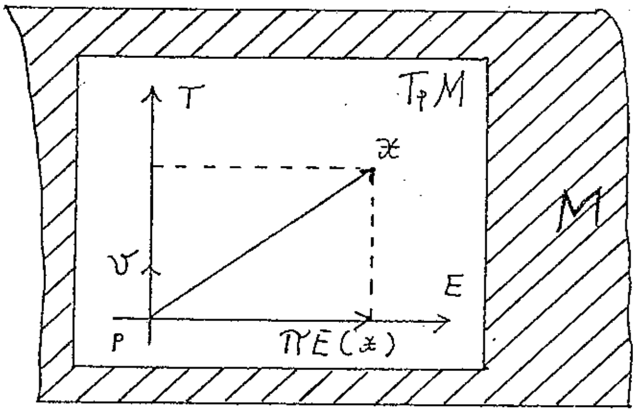
Denomina-se a T o eixo temporal de (P,v) e a E o espaço euclidiano localmente em repouso para (P,v). πE e πT indicam a projeções de $T_pM \to E$, $T_pM \to T$, respectivamente.

---

* Veja Proposição I - 28

Exemplifiquemos com a noção de velocidade, ângulo e comprimento de vetores, medidos por um observador instantâneo (P,v). O ângulo θ entre x e y, $x,y \in T_pM$ é definido por

$$\theta = \text{arc cos} \left[g(\pi E(x), \pi E(y) / \sqrt{g(\pi E(x), \pi E(x) g(\pi E(y), \pi E(y))} \right]$$

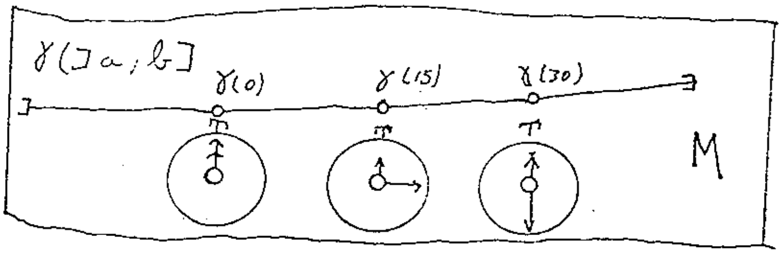


O comprimento de um vetor $x \in T_pM$ é a norma da sua projeção espacial, $\| \pi E(x) \|$. A velocidade euclidiana de x, onde $x = \alpha v + \pi E(x)$ é, $v e \ell(x) = \frac{1}{\alpha} \pi E(x)$ normalmente estamos interessados não em uma medida física isolada mas numa série de medidas tomada por um "mesmo" observador. A definição de observador visa formalizar esta idéia.

Definição V - 8

Denomina-se observador em um espaço tempo , (M,A,g) a uma curva $\gamma : | a,b | \to M$ tal que $\forall t \in |a,b|$, $(\gamma(t), \gamma_*(t))$ é um observador instantâneo. O parâmetro t denomina-se tempo próprio do observador γ.

O emprego da palavra tempo próprio para o parâmetro de um observador $\gamma(t)$ reflete a noção física de que o "tempo marcado por um bom relógio", r, cuja trajetória num dado espaço tempo é $\gamma(t)$ um observador, é $r = \alpha + t/\beta$, para algum α β ε R.



Seja $\gamma(t)$ um observador, $T_{\gamma(t)}M$ decomposto canonicamente em $T(t) \oplus E(t)$ e $x(t) \in E(t)$. Iremos agora examinar como saber se $x(t)$ "está apontando sempre a mesma direção" ou "é paralelo" ou "não está girando". Uma maneira de representar a noção física que queremos retratar e se $x(t)$ pode representar a direção em que aponta um giroscópio em $\gamma(t)$.

O primeiro passo é introduzir o conceito de observador em queda livre.

Definição V - 9

Um observador $\gamma(t)$ é dito em queda livre sse $\gamma(t)$ é uma geodésica, isto é a aceleração de $\gamma(t)$, $A(t)$ é nula para todo t, onde* $A(t) = \nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma(t)$.

Definição V - 10

Seja $\gamma(t)$ um observador em (M,A,g), $x(t)$ e

*Veja Definição IV - 19, notaremos $\nabla_{\frac{d}{dt}} x$ a $(\gamma^*\nabla)_{\frac{d}{dt}} x$.

$z(t)$ campos sobre γ, $y(t) = \alpha\, d/dt$, $\alpha \in R$, e ∇ a conexão associada a g. Denomina-se conexão de Fermi-Walker a uma conexão F sobre γ tal que*

$$F_y x = | \pi E \circ (\gamma^* \nabla)_y \circ \pi E + \pi T \circ (\gamma^* \nabla) \circ \pi T \, | \, x .$$

Um campo $x(t)$ sobre γ para o qual $F_{\frac{d}{dt}} x(t) = 0$ é dito um giroscópio para o observador γ.

Proposição V - 3

Nas mesmas condições da definição anterior tem-se:

1) a conexão de Fermi-Walker existe e é única.

2) $F_{\frac{d}{dt}} x(t) = \nabla_{\frac{d}{dt}} x(t) + g\,(\gamma_*(t), x)\, A(t) - g\,(A(t), x(t))\, \gamma_*(t)$,

3) $\frac{d}{dt}\, g\,(x(t), z(t)) = g\,(F_{\frac{d}{dt}} x(t), z(t)) + g\,(x(t), F_{\frac{d}{dt}} z(t))$,

4) Sendo $T_{\gamma(t)} M = T_{\gamma(t)} \oplus E_{\gamma(t)}$, se

$x(t)$, $z(t) \in E_{\gamma(t)}$, $\forall t$, tem-se que

$(F_{\frac{d}{dt}} x) \in E_{\gamma(t)}$ e $g(F_{\frac{d}{dt}} x, z) = g(\nabla_{\frac{d}{dt}} x, z)$.

A interpretação física da conexão de Fermi-Walker para a evolução temporal do spin de um elétron é um bonito exemplo de aplicação que pode ser visto em (Wheeler,73).

Discutiremos agora o conceito de sistema de referência e alguns tópicos relacionados, como o problema de sincronizabilidade. Escolhemos tratar o problema de sincronizabilidade porque é um assunto que, embora bastante confuso quanto tratado da maneira convencional, e muito elegantemente tratável na linguagem geométrica moderna.

Definição V - 11

Denomina-se sistema de referência, num espaço-tempo (M,A,g), a um campo vetorial H, em M, cujas curvas integrais sejam observadores*.

Se os observadores em H, isto é os observadores que são curvas integrais do campo H, estiverem em queda livre H é dito um sistema de referência geodésica.

Proposição V - 4

Um campo H em (M,A,g) é um sistema de referência sse $\forall\ p \in M$, $g(H,H) = -1$ e H está no sentido do futuro. Tem-se ainda que o sistema de referência H é geodésico sse $\nabla_H H = 0$.

---

*Veja Definição III - 28 e o teorema III - 4

Definição V - 12

Seja H um sistema de referência H em (M,A,g) e w o campo de 1-formas fisicamente equivalente a H. O sistema de referência H é dito:

1) Localmente propriamente sincronizável sse $dw = 0$.

2) Localmente sincronizável sse $w \wedge dw = 0$.

3) Propriamente sincronizável sse existe uma função $t : M \to R$, $C^\infty \mid w = -dt$

4) Sincronizável sse existem funções $t : M \to R$, C^∞ e $f : M \to R \mid f > 0$ e $w = -fdt$.

~~Proposição V - 5~~

Nas mesmas condições da definição anterior ,

1) Se um sistema é sincronizável então é localmente propriamente sincronizável.

2) Se a variedade M é simplesmente conexa H é posteriormente sincronizável sse é localmente propriamente sincronizável.

Demonstração:

Seja γ um observador em H e $P = \gamma(t)$. Tem-se que $\gamma^*(w_p) = -dt$, pois $(\gamma^* w)(d/dt) = w(\gamma_*(t)) = g(H,H) = -1$.

Para a primeira afirmação basta ver que se

$w = -fdt$, $w \wedge dw = - fdt \wedge d\,(-fdt) = fdt \wedge df \wedge dt +$
$+ fdt \wedge fd(dt) = 0.$

A segunda afirmação é nada além do que o teorema de Poincaré, teorema IV - 1.

O significado físico das últimas definições é o seguinte:

Se H é um sistema propriamente sincronizável seja $N \subset M$ a superfície de nível $t = \alpha$. Cada observador $\gamma(u)$ pode ajustar seu relógio para $u = \alpha$ em $N \cap \gamma(u)$. A partir de então o parâmetro t é dado pela leitura do relógio, u, de cada um dos observadores.

Se R é um sistema sincronizável através do mesmo procedimento o parâmetro t é dado por $t \circ \gamma = \int_{\alpha} \frac{du}{f(\gamma(u))}$, pois $du = (f \circ \gamma).\ \gamma^{*}(dt)$.

Em ambos os casos o parâmetro t pode ser conhecido por qualquer observador que transporte um relógio e conheça a função f.

A proposição V - 5 é insatisfatória para nos dizer quando um sistema é sincronizável.

As definições e proposições seguintes visam esclarecer a questão.

Definição V - 13

Seja H um sistema de referência em (M,A,g) e $\gamma(u)$ um observador em H. Um campo W sobre γ será dito um vizinho de γ sse existir um campo W' sobre $\gamma \mid \pi E(W') = W$ e

$L_H W' = 0^*$.

Seja F a conexão de Fermi-Walker sobre γ. Definem-se a tri-velocidade e a tri-aceleração do vizinho W como sendo, respectivamente,

$$V(u) = F_{(d/du)}\ W(u) \quad e \quad A(u) = F_{(d/dt)}\ V(u).$$

Proposição V - 6

Nas mesmas condições da definição anterior tem-se:

1) $V(u) = \pi E \circ \nabla_{\frac{d}{du}} \circ \pi E(W(u))$

2) $A(u) = \pi E \circ \nabla_{\frac{d}{du}} \circ \pi E(V(u))$.

Se H é um sistema de referência geodésico tem-se

3) $L_H W = 0$.

Seja (P,z) um observador instantâneo $T_P M = E \oplus T$ a decomposição canonica do espaço tangente e $\psi_z : E \to T_P M$ o operador definido por

$\psi_z(x) = R_{zx} z$. Verifica-se que,

4) $\pi E \circ \psi_z(x) = \psi_z(x), \quad \forall\ x \in E$.

---

* Veja Definição III - 30

Finalmente se H é um sistema de referência geodésico tem-se que:

5) $A(u) = \psi_{\gamma_*(u)}(W(u))$.

Demonstraremos as duas últimas proposições:

Seja $\underline{R}$ o tensor de tipo (0,4) fisicamente equivalente a R. A afirmação 4 se verifica vendo que,

$$g(\psi_z x, z) = g(z, R_{zx} z) = \underline{R}\,(z,z,z,x) = 0^{*}.$$

Para verificar a última afirmação construa-se um campo $\tilde{W}$ em M | $|\tilde{W}, H| = 0$ e $\tilde{W}(\gamma(u)) = w(u)$, para $u \in |\, a,b \,|$.

Como H é geodésico tem-se que $F_{\frac{d}{du}} W(u) = \nabla_{\gamma_*(u)} W(u)$, isto é, a conexão de Fermi-Walker coincide com a conexão induzida.

Tem-se pois a identidade:

$$A(u) = (\nabla_H \; 0 \; \nabla_H \tilde{W})(\gamma(u)) = \nabla_H(\nabla_{\tilde{W}} H + |H,\tilde{W}|) =$$

$$= \nabla_H \nabla_{\tilde{W}} H = R_{H\tilde{W}} H + \nabla_{\tilde{W}} \nabla_H H + \nabla_{|H,\tilde{W}|} H.$$

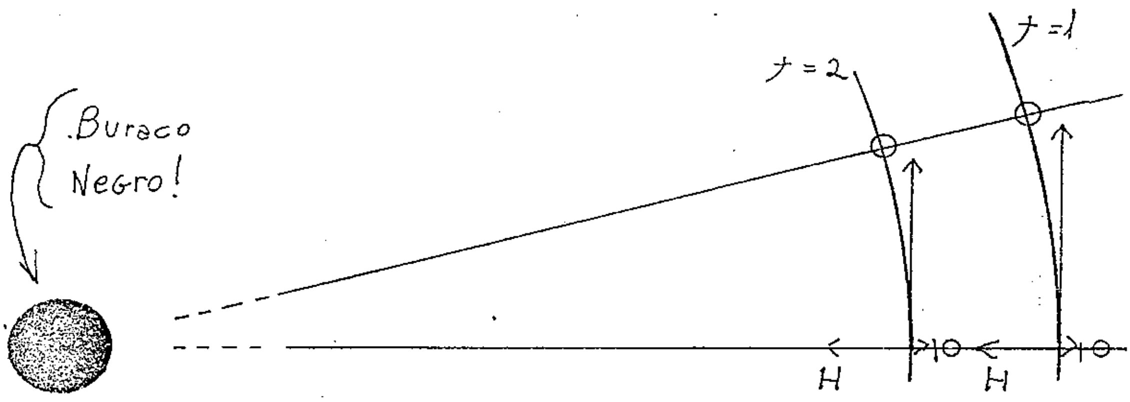
Como os dois últimos termos da identidade se anulam, tem-se, pela definição de ψ_z, o demonstrando.

Com alguma intuição física podemos, a partir da última proposição, imaginar experimentos para, a partir

---

* Veja Proposição IV - 16

da medida a aceleração relativa de objetos em queda livre , decidir sobre a presença de matéria nas proximidades do local.



Proposição V - 7

Seja H um sistema de referência em (M,A,g) , $\gamma(t)$ um observador em H, $P = \gamma(t)$, $T_PM = T_P \oplus E_P$ a decomposição canonica e $W(t)$ um campo sobre γ | $W(t) \in E_{\gamma(t)}$. Tem-se que:

1) $\pi E\ (\nabla_{W(t)}H) = \nabla_{W(t)})$.

2) Se $W(t)$ é um vizinho em $\gamma(t)$, sua velocidade

$$V(u) = \nabla_{W(u)}H$$

Demonstração:

Para a primeira afirmação note-se que

$$g(\nabla_W H,H) \overset{*}{=} \frac{1}{2}\ W(g(H,H)) = \frac{1}{2}\ W(1) = 0$$

---

* Veja proposição IV - 14

Para a segunda, como* $F_{\frac{d}{dt}} W = \nabla_{\gamma_*(t)} W$, basta provar que $g(\nabla_{\gamma_*(t)} W, x) = g(\nabla_{W(t)} H, x) \quad \forall\, x \in E_{\gamma(t)}$.

Pela definição de vizinho, existe um campo W' sobre γ | $\pi E(W'(t)) = W(t)$ e $L_H W' = 0$.

Seja a função f sobre γ definida por $f \cdot \gamma_*(t) = W'(t) - W(t)$.

Seja y uma extensão do campo W' para um aberto $U \subset M$, isto é $y \circ \gamma = W'$, tal que $|y, H| = 0$.

Seja uma função $F : U \to R$, C^∞, | $F \circ \gamma = f$.

Seja z o campo em U definido por $z = y - F.H$.

Tem-se que $z \circ \gamma = W$ e

$$\nabla_z H = \nabla_H z + |z, H| = \nabla_H z + |y - F \cdot H, H| = \nabla_H z - |FH, H| = \nabla_H z + H(F)H.$$

No ponto $\gamma(t)$, $z = y - FH = W' - f(t)\, H = W' - f\gamma_*(t) = W(t)$, e $\nabla_{W(t)} H = \nabla_{\gamma_*(t)} W + \gamma_*(t)(f)\gamma_*(t)$.

Tomando a projeção em $E_{\gamma(t)}$ temos que

$$g(\nabla_{\gamma_*(t)}, x) = g(\nabla_{W(t)}, x) \quad , \quad \forall\, x \in E_{\gamma(t)}$$

Q.E.D

<u>Definição V - 14</u>

Seja H um sistema de referência em (M, A, g) ,

---

* Veja Proposição V - 3

$(P,H(P))$ o observador instantâneo de H em P, e $T_PM = T_P \oplus E_P$ a decomposição canonica. O sistema de referência H é dito:

1) rigido sse $g(x, \nabla_y H) = - g(\nabla_x H, y)$, $\forall P \in M$, $\forall x,y \in E_P$.

2) irrotacional sse $g(x, \nabla_y H) = g(\nabla_x H, y)$, $\forall P \in M$, $\forall xy \in E_P$

Em função da última proposição a interpretação física desta definição é bastante intuitiva.

Seja $W(t)$ um vizinho sobre um observador $\gamma(t)$ em H. Se H é rígido, temos que W é perpendicular a sua velocidade, $V(t)$, pois

$g(V,W) = g(\nabla_{\gamma_*(t)} W, W) = g(\nabla_W H, W) = -g(W, \nabla_W H) = 0$, ou seja W pode apenas "rodar em torno de H". Se H é irrotacional, tomemos $x(t)$ um giroscópio em γ tal que $g(x(a), W(a)) = 0$, temos que*,

$$g(x(a), V(a)) = g(x, \nabla_{\gamma_*(a)} W) = g(x, \nabla_W H) = g(\nabla_x H, W) =$$

$$= g(\nabla_{\gamma_*(a)} x, W) = g(F_{\frac{d}{dt}} x - g(\gamma_*(a), x)\, A(a) + g(A(t), x)\gamma_*(a), W) = 0$$

ou seja W pode "aumentar" mas deve "apontar sempre a mesma direção ".

Estamos agora em condições de propor um critério simples que complete a proposição V - 5 e nos diga quando um sistema de referência é localmente sincronizável.

<u>Teorema V - 1</u>

Um sistema de referência H é localmente sincro

---

* Veja Proposição V -

nizável sse é irrotacional.

Demonstração:

Sejam x,y dois campos num aberto U C M perpendiculares a H e μ a 1-forma fisicamente equivalente a H.

Da definição V - 14, H é irrotacional sse

$g(\nabla_x H, y) = g(\nabla_y H, x)$

como $g(x,H) = 0$, $g(\nabla_y x, H) + g(x, \nabla_y H) = 0$

analogamente $g(y,H) = 0 \rightarrow g(\nabla_x y, H) + g(y, \nabla_y H) = 0$

somando as identidades, $g(\nabla_x y, H) = g(\nabla_y x, H)$.

Lembrando que $|x, y| = \nabla_x y - \nabla_y x$, a última identidade equivale a $g(|x, y|, H) = \mu\ |x, y| = 0$.

Por outro lado, H é localmente sincronizável sse $\mu \wedge d\mu = 0$. Como o produto exterior é anti-simétrico esta condição equivale a termos $d\mu(x,y) = 0$, $\forall$ x,y perpendiculares a μ^*, que é o mesmo, que ser perpendicular a H. Lembrando ainda que, pela proposição IV - 4.

$$d\mu(x,y) = \frac{1}{2}\ x(\mu(y)) - \frac{1}{2}\ y(\mu(x)) - \frac{1}{2}\mu\ |x, y| ,$$

como $\mu(x) = \mu(y) = 0$, $\mu \wedge d\mu = 0 \leftrightarrow \mu\ |x, y| = 0$

Q.E.D

Uma maneira de perceber o sentido físico da propriedade de sincronizabilidade é a da possibilidade de fazer ajuste consistente entre os vários observadores de um sistema de referência a partir de sinais de luz. Muito resumidamente vejamos como formalizar o processo.

Definição V - 15

Denomina-se foton a uma geodésica $\lambda: [a, b] \to M$ (M,A,g) espaço tempo, tal que $g(\lambda_*(t),\lambda_*(t)) = 0$ e $\lambda_*(t) \neq 0$ e é no sentido do futuro. Um foton $\phi : [e, d] \to M$ é dito equivalente a $\lambda, \phi \sim \lambda$, sse $\lambda(t) = \phi(\alpha + \beta t), \forall t, \alpha \rho \in R$, $\beta \in R_+^*$.

Denomina-se sinal de luz a classe de equivalência, $|\lambda|$, de um dado foton.

O fato de tomarmos a classe de equivalência significa que não estamos interessados na "cor" do foton, mas apenas na imagem da geodésica que o descreve.

A proposição seguinte garante um método pelo qual dois observadores "próximos" podem comparar "pequenos" intervalos de tempo.

Proposição V - 8

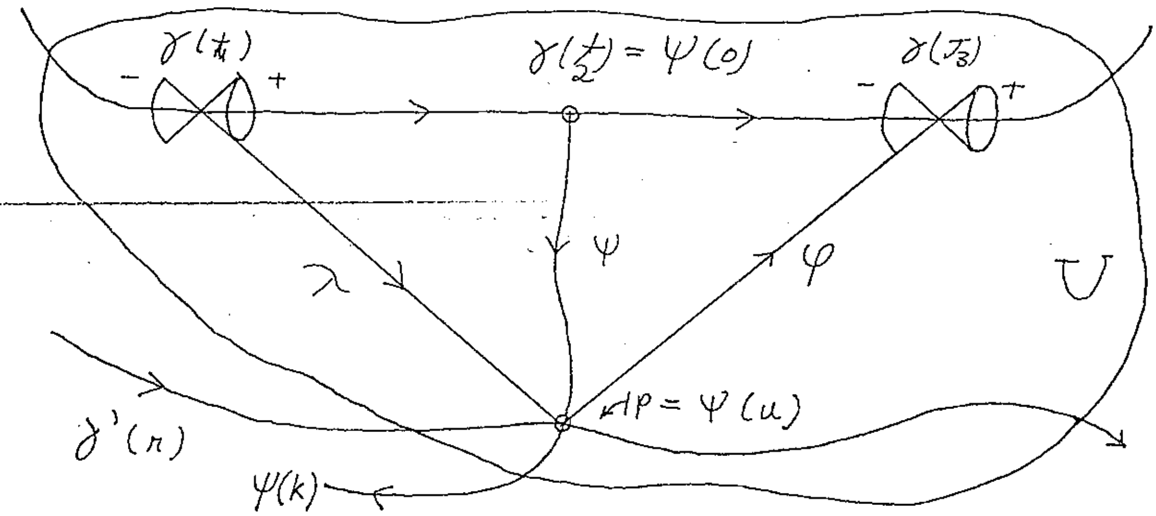
Seja $\gamma : [a, b] \to M$ um observador em (M,A,g) três constantes $t_1 < t_2 < t_3$ no domínio de γ e $|\lambda|$, $|\phi|$ sinais de luz em M.

1) Dado t_2, existe um aberto U de M tal que $\gamma(t_2) \in U$ e $\forall P \in U - \gamma[a, b]$, as constantes t_1, t_3 e os sinais de luz $|\lambda|$, $|\phi|$ existem e estão univocamente determinados

pelas condições sobre representantes $\lambda|c, d| \to M$ e $\phi\ |e, h| \to M$, $\lambda(c) = \gamma(t_1)$, $\lambda(d) = P$, $\phi(e) = P$, $\phi(h) = \gamma(t_3)$.

Seja $\psi : |0, k| \to M$ curva tal que $\psi(0)=\gamma(t_2)$ e $g(\gamma_*(t_2), \psi_*(0)) = 0$. Seja a função $\Delta : |0, j| \to R$ a função definida por $\Delta(u) = t_2 - \frac{1}{2}\ |\ t_3 - t_0\ |$ onde t_3 e t_0, pelo ítem anterior, são univocamente determinados por $P = \psi(u)$, para uma escolha conveniente de $j \in |0, k|$.

2) Afirmamos que $\lim_{u\to 0} \Delta(u) = 0$ e $\lim_{u\to 0} |\frac{d}{du}\Delta(u)| = 0$



Seja um observador $\gamma'(r)$, com $\gamma'(r_2) = P$. Imagine que o observador γ emite uma série de sinasi de luz com uma frequência Ω, em seu tempo próprio. Se o obervador γ' usar uma função $f(\gamma'(H) \to R$ para "corrigir" seus intervalos de tempo $(r - r') \sim (t - t')f$. Esta idéia pode nos ajudar a visualizar a definição do sistema sincronizável se a função f puder ser definida consistentemente em U.

O objetivo desta secção é o estudo do "teorema da conservação da energia" em relatividade geral.

De início desenvolvemos a teoria de integração necessária ao estudo do problema. A seguir introduzimos, como alguma motivação física, os conceitos de partícula, campo eletromagnético e tensores de matéria e eletromagnetismo.

Finalizamos a secção estudando a equação de Einstein e exemplos de espaços-tempo.

O primeiro passo a ser dado é o de particularizar algo da teoria de integração desenvolvida no capítulo IV para variedades Riemannianas.

Notaremos (M,A,g) à variedade topológica M com estrutura A e métrica g.

A métrica g permite a eleição de um elemento de volume distinguida em M, que denominamos elemento de volume unitário e definimos como se segue.

Seja $Q \in M$, $\{e_i\}$ uma base $\overline{e}^i = e_i^*$ $\alpha = \sqrt{\det g(e_i,e_j)}$ e $m = \dim M$

$$\Omega = \alpha \, \overline{e}^i \wedge \ldots \wedge \overline{e}^j \text{ , ou seja}$$

$$m! \, \Omega (e_1, \ldots, e_m) = 1, \ \forall \{e_i\} \text{ ortonormal.}$$

Para usar a linguagem desenvolvida no capítulo IV, basta tomar o valor da integral sobre simplex $(+\sigma, \delta, \psi)$ tal que $\psi^*(\Omega) = \delta$.

Definição V - 16

Denomina-se caixa causal num espaço-tempo (M, A,g) a mergulho $\phi : D \to M$, onde D é o cilindro standard do espaço de Minkowski,

$$D = \{(x^1 \ldots x^4) \mid \sum_{\nu=1}^{3} x^\nu x^\nu \leq 1 \text{ e } |x^4| \leq 1\},$$

e ϕ preserva a orientação, a orientação temporal e o caráter causal" de F, das subvariedades D_j^i, que constituem o seu bordo, ∂D.

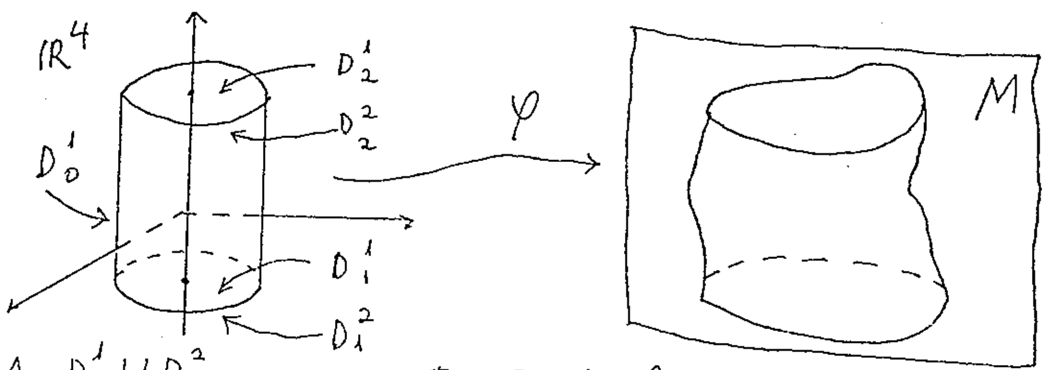
$$D_0^1 = \{(x^1 \ldots x^4 \mid \Sigma\, x^\nu x^\nu = 1,\ \nu \in \{1,2,3\} \text{ e } |x^4| < j)\}$$

$$D_1^1 = \{(x^1,\ x^2,\ x^3,\ -1) \mid \Sigma\, x^\nu x^\nu < 1\}$$

$$D_2^1 = \{(x^1,\ x^2,\ x^3,\ 1) \mid \Sigma\, x^\nu x^\nu < 1\}$$

$$D_1^2 = \{(x^1,\ x^2,\ x^3,\ -1) \mid \Sigma\, x^\nu x^\nu = 1\}$$

$$D_2^2 = \{(x^1,\ x^2,\ x^3,\ 1) \mid \Sigma\, x^\nu x^\nu = 1\}.$$



A $D_2^1 \cup D_2^2$, ou a restrição de φ, ou a imagem por φ, é denominada secção espacial

Se W é uma 3-forma em M, sabemos pelo teorema de Stockes que

$$\int_{\phi(D)} dW = \int_{\partial D} W$$

Se x é um campo vetorial em M. Define-se $\operatorname{div}(x) : M \to R$ por*

$$\operatorname{div}(x)\ \Omega = d\,|\,I(x,\Omega)\ |\ .$$

Proposição V - 9

Se, nas condições da definição anterior $L_x\Omega = 0$, então $\int_{\partial D} I(x,\Omega) = 0$.

Demonstração:

Da proposição IV - 4 tem-se

$$L_x(\Omega) = I(x,\ d\Omega) + dI(x,\Omega).$$

Como a dimensão de Ω é máxima, $d\Omega = 0$ e $L_x\Omega = dI\ (x,\Omega) = \operatorname{div}(x)\Omega$, e

$$\operatorname{div}(x) = 0 \to \int_D d\ I(x,\Omega) = \int_D 0.\Omega = 0 = \int_{\partial D} I\ (x,\Omega).$$

---

* Veja Definições I - 45 e IV - 4

Proposição V - 10

Nas condições da definição anterior, se $\{e_i\}_Q$ é um sistema de coordenadas, e

$x = x^i e_i$, $\quad \operatorname{div}(x) = x^i{}_{|i}$.

<u>Definição V - 17</u>

Dado um tensor T, de componentes $T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}$ num sistema de coordenadas qualquer, define-se o operador divergente,

$\operatorname{div} : T^r_s \to T^{r-1}_s$, por

$$\operatorname{div}(T)^{i_1 \ldots i_{r-1}}{}_{j_1 \ldots j_s} = T^{i_1, \ldots, i_{r-1}, k}{}_{j_1, \ldots, j_s | k} .$$

Convenção:

Usaremos nesta secção as seguintes convenções. Dado um tensor T de tipo (0,2), notaremos por $\tilde{T}$ e $\bar{T}$, respectivamente, os tensores de tipo (1,1) e (2,0) fisicamente equivalente a T. Assim dados x_1, x_2 ε T_pM e x^1, x^2 $\varepsilon\, T^*_pM | x^i(x_j) = g(x_i, x_j)$, $T(x_i, x_j) = \tilde{T}(x^i, x_j) = \bar{T}(x^i, x^j)$.

Dado $x \;\varepsilon\; T_pM$ e $T \;\varepsilon\; (T^0_2)_pM$, $\tilde{T}x \;\varepsilon\; T_pM$ é definido por $\mu(\tilde{T}x) = \tilde{T}(\mu, x)$, $\forall\, \mu \;\varepsilon\; T^*_pM$.

É importante para o estudo das leis de conservação, que estudemos o conceito de vetor de Killing.

Definição V - 18

Dada uma variedade (M,A) com métrica g, denomina-se isometria em M a um difeomorfismo $U : M \mid U^*(g) = g$.

Um campo vetorial K em M diz-se um campo de Killing sse $L_K g = 0$.

Proposição V - 11

Nas condições da definição anterior e da proposição III - 28, seja $U : R \times M \to M$ o grupo a um parâmetro que tem K como gerador infinitesimal. Afirmamos que K é um campo de Killing sse:

1) $U_t : M \times M$ é uma isometria, $\forall\, t$ no intervalo de definição.

2) $g(\nabla_x K, y) = -g(x, \nabla_y K)$, $\forall\, xy \in T_Q M$, $\forall\, Q \in M$.

A demonstração da proposição é, em essência a própria definição III - 30 e o comentário que segue a proposição III - 22.

Para verificar-se a segunda afirmação, tomemos a proposição IV - 5, que nos afirma que

$\nabla_K x = \nabla_x K + L_K x$ e que $g(\nabla_K y, x) + g(y, \nabla_K x) = Kg(y,x)$,

donde $g(y, \nabla_x K) + g(x, \nabla_y K) = Kg(y,x) - g(y, L_K x) - g(x, L_K y)$

O fato do segundo membro anular-se sse K é um campo de Killing termina a demonstração.

A proposição seguinte é a base da análise do teorema da conservação da energia.

Proposição V - 12

Dados um espaço tempo (M,A,g), um campo tensorial $\bar{T}$ de tipo (2,0) e simétrico, e K um campo de Killing tem-se:

$$\operatorname{div}(\bar{T}) = 0 \rightarrow \operatorname{div}(\tilde{T}K) = 0$$

Demonstração:

Num sistema de coordenadas qualquer tem-se, notando por K^j e K_j os componentes de K e do covetor fisicamente equivalente a K,

$$\operatorname{div}(\tilde{T}K) = (T^i_{\ j}K^j)_{|i} = (T^{ij}K_j)_{|i} = (T^{ij}{}_{|i})K_j + T^{ij}(K_{j|i}) =$$

$$= (\operatorname{div} T)^j K_j + T^{ij}(K_{j|i}).$$

No último membro o primeiro termo é nulo por hipótese e o segundo se anula em decorrência da simetria de T da anti-simetria de $K_{j|i}$, provada na segunda parte da proposição anterior.

Q.E.D

É um postulado de relatividade geral que a métrica do espaço tempo e definida em função da distribui -

ção da matéria e do campo eletromagnético presentes.

Formalizaremos a seguir as noções de partícula material, fluxo de matéria, fluxo de carga, tensor de matéria e tensor eletromagnético num dado espaço tempo.

A semelhança de que foi feito nos capítulos precedentes daremos muito pouca ênfase no desenvolvimento histórico da teoria que, embora seja uma boa maneira de adquirir intuição física, foge um puco aos objetivos da dissertação*.

Definição V - 19

Denomin-se partícula de massa m a uma curva $\gamma(t)$, tal que $g(\gamma_*(t), \gamma_*(t)) = -m^2$ e $\gamma_*(t)$ é no sentido ~~do do futuro, $\forall$ t no domínio de γ.~~

Uma partícula que seja geodésica é dita uma partícula em queda livre.

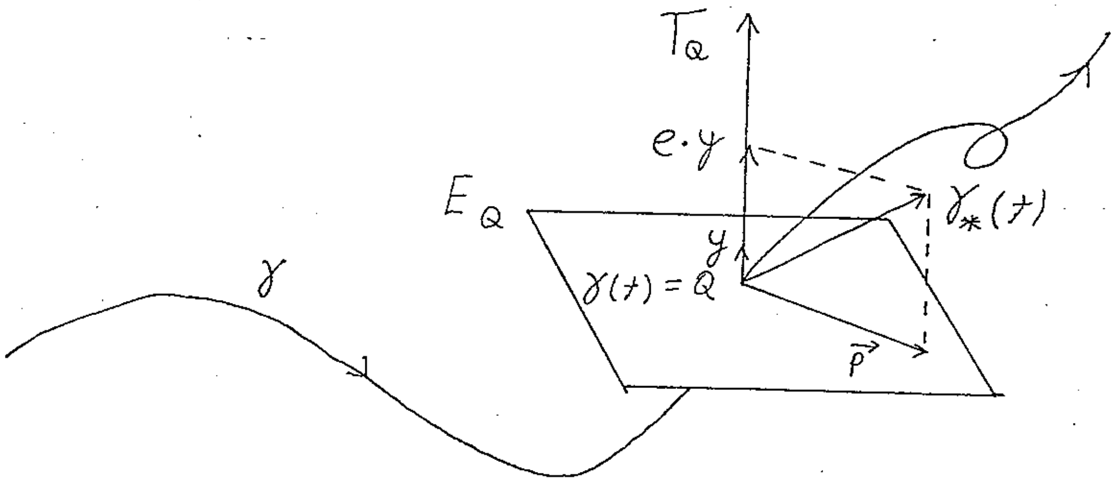
Seja (Q,y) um observador instantâneo e $T_Q M = E_Q \oplus T_Q$ a decomposição canonica. Tem-se para uma partícula γ, com $\gamma(a) = Q$ a decomposição da tangente $\gamma_*(a) = e \cdot y + \vec{P}$, $e \in R$, $\vec{P} \in E_Q$.

Denomina-se energia de γ medida pelo observador (Q,y) a $e = -g(\gamma_*(a), y)$, momento ao vetor $\vec{P} \in E_Q \mid \vec{P} + ey = \gamma_*(a)$, e velocidade a $\vec{v} = \vec{P}/e$.

Usando $\Gamma = (1 - |\vec{v}|^2)^{-\frac{1}{2}}$, $e = \Gamma m$ e $\vec{P} = \Gamma m \vec{v}$.

---

* Veja (Einstein, 58)



Definição V - 20

Denomina-se fluxo material num espaço tempo (M,A,g) a uma tripla (η,x,m), onde η é um campo escalar, $\eta : M \to R$ e x é um campo vetorial em M cujas curvas integrais sejam partículas de massa m. Dada L uma secção espacial denomina-se número de partículas em L a integral

$$N = \int_L I(\eta x, \Omega) .$$

Exemplo:

Seja $(\eta,\ m\partial_4, m)$ o fluxo material no espaço de Minkowski e tomemos L a secção espacial como na definição com o mergulho identidade.

O número de partículas em L, para η uma função constante é $N = (4/3)\pi m \eta$.

Definição V - 21

Denomina-se tensor de momento energia num espaço tempo (M,A,g) a um campo tensorial T, de tipo $(0,2)$, simétrico e tal que $T(x,y) \geq 0$, $\forall\, Q \in M, \forall\, x,y \in T_QM$, x e y causais, no sentido do futuro.

Dado um observador instantâneo (Q,y), define-se a densidade de energia momento medida por (Q,y) ao vetor $\tilde{T}y$.

Definição V - 22

Dado um fluxo de matéria (η,x,m) define-se o tensor de energia momento associado a (η,x,m) ao tensor $\bar{T} = \eta\, x \otimes x$

Proposição V - 13

Nas condiçoes das duas definições anteriores, sendo $T_QM = T_Q + E_Q$ a decomposição canonica para (Q,y) tem-se:

$T(y,y) = \eta(Q)\, e^2$, onde $e = -g(x,y)$, ou também

$\mu\,(\tilde{T}y) = \eta(Q)\, e^2$, onde $\mu \sim y$.

O tensor de momento energia é pois uma manei ra de fornecer a um observador instantâneo* as "densidades" de energia e momento associadas a um fluxo material.

Definição V - 23

Dado um espaço tempo (M,A,g), um fluxo material (η,x,m) e uma constante α denomina-se densidade de carga-corrente ao campo $J(Q) = \alpha \, . \, \eta(Q)\, x(Q)$, onde a constante α é denominada carga da partícula.

Denomina-se campo eletromagnético em (M,A,g) a uma 2-forma F em M.

Dado um observador instantâneo (Q,y), define-se o campo elétrico medido por (Qy) como $\vec{E} = \tilde{F}y$, e o campo magnético como $\vec{B} \in E_Q \mid 4 ! \, \Omega\, (x,z,\vec{B},y) = F(x,y) \;\forall\, x,z \in E_Q$, $T_Q M = T_Q \oplus E_Q$.

Proposição V - 14

Nas condições da definição anterior, dado F, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ existem e estão univocamente determinados. Temos ainda que $\vec{E} \in E_Q$.

Definição V - 24

Define-se modelo relativístico como uma tripla $((M,A,g), F, C)$, onde (M,A,g) é um espaço tempo, F um

* Veja (Wheheeler , 73)

campo eletromagnético e C um conjunto $C = \{(\eta_i, x_i, m_i, \alpha_i)\}$ de fluxos materiais e cargas, denominado modelo material.

Seja T_i o tensor de matéria associado ao fluxo $(\eta_i,\ x_i,\ m_i)$. Denomina-se tensor de matéria do modelo relativístico ao tensor $T = \sum_i T_i = \sum_i \eta_i x_i \otimes x_i$.

Seja J_i a a densidade de carga-corrente $J_i = \alpha_i\ \eta_i\ x_i$. Denomina-se densidade de carga-corrente ao modelo $J = \sum_i J_i$.

Um modelo relativístico é uma maneira de descrever um espaço tempo no qual existe uma distribuição arbitrária de carga e matéria. Na prática porém apenas modelos muito simples são interessantes, porque solúveis.

Estudaremos agora a "física" do modelo relativístico, isto é, as leis pelos quais se determina F e g ~~a partir de C.~~

Definição V - 25

Um campo eletromagnético F obedece as leis de Maxwell sse, nas condições da definição anterior,

$dF = 0$ e $\operatorname{div}(\overline{F}) = 4\pi J$.

Denomina-se tensor eletromagñetico, associado ao campo F, ao tensor de energia momento E | num sistema de coordenadas qualquer

$$E_{ij} = (1/4\pi)(F_{ik}F_j^{\ k} - (1/4)\ g_{ij}F^{\ell m}F_{\ell m}).$$

Proposição V - 15

Nas condições da definição anterior E é de fato um tensor de energia momento, e se F obedece as leis de Maxwell, $\mathrm{div}(\bar{E}) = -\tilde{F}J$, e $\mathrm{div}(J) = 0$.

Em analogia ao tensor de matéria o tensor eletromagnético nos informa acerca da energia e do momento transportados por um campo, e e $\vec{S}$ respectivamente, onde

$$e = (1/8\pi)\ (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad e \quad \vec{S} = (1/4\pi)\ \vec{E} \times \vec{B}\ .$$

A força de Lorentz sobre uma partícula γ de carga α é descrita por

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma_*(t) = \alpha\ \tilde{F}\gamma_*(t)\ .$$

Definição V - 26

Um modelo relativístico ((M,A,g),F,C) obedece as leis de Einstein sse

$$G = Ric - \frac{1}{2} Sg = T + E$$

Exemplos:

1) O espaço tempo de Minkowski com F = 0 e C o conjunto vazio.

2) O modelo de Friedman , onde:

$M = R^3 \times R_+^*$. A a estrutura produto,

$$g = (x^4)^{\frac{4}{6}} \sum_{=1}^{3} dx^{\nu} \otimes dx^{\nu} - dx^4 \otimes dx^4,$$

onde $(x^1 \ldots x^4) \varepsilon M$ e $x^4 \varepsilon R_+^*$

$F = 0$ e $C = \{(\eta, v, m, \alpha)\}$ onde

$\alpha = 0$, $m = 1$, $v = \partial_4$ e $\eta = (4/3)(x^4)^{-2}$.

A orientação e a orientação temporal em M são as definidas por $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^4$ e ∂_4, respectivamente.

Proposição V - 16

O modelo de Friedman obedece as leis de Einstein e,

$T = G = (4/3)(x^4)^{-2}\, dx^4 \otimes dx^4$, e

$S = (4/3)(x^4)^{-2}$

O modelo de Friedman representa a evolução de um universo cheido de pó, homogeneamente distribuido e com velocidade nula em relação ao sistema de referência dado pelo campo ∂_4, Este sistema de referência é denominado sistema de referência canonico do modelo.

Proposição V - 17

Seja o modelo de Friedman , γ um observador no sistema canonico e W um vizinho de γ. Afirma - se que:

1) O sistema de referência canonico e um sistema de referência geodésico.

2) $W = a^{\nu}\partial_{\nu}$, $\nu \in \{1,2,3\}$, $a^{\nu} \in R$ constantes, ē um vizinho em γ. Sua tri-velocidade e aceleração são, respectivamente

$$V = (2/3x^4)W \quad e \quad A = -\ (2/9(x^4)^2)\ W.$$

O universo de Friedman foi o primeiro modelo não trivial de universo*. O vizinho W do intem anterior representa a direção em que apontamos o telescōpio ao observador uma partīcula de pō (estrela, galaxia,etc...) , não demasiado distante.

A velocidade V explica o " desvio para o vermelho" devido a uma"velocidade de recessão" do objeto observado. O sinal da aceleração nos informa que esta velocidade diminui no decorrer do "tempo".

Ē interessante observar que fazendo, como na definição V- 12, $t = x^4$, o sistema de referência canonic , ē propriamente sincronizāvel . Uma consequēnica necessāria ē que o sistema canonico ē irrotacional, o que pode ser intuido da expressão da velocidade de um vizinho.

Estudaremos agora como enunciar para a relatividade geral um teorema semelhante ao teorema da conservação da energia.

O equivalente deste teorema, na fīsica prē -

---

* Veja (Weinberg, 72; Zeldovich, 71)

relativística, nos dá uma maneira de, a partir de equações diferenciais, deduzir certas equações integrais. Um bom exemplo de equações deste tipo são as leis de conservação de matéria da hidrodinâmica e as leis de Maxwell na forma integral.

O estudo da interação de campos eletromagnéticos e mâteria carregada nos leva a equação div (T + E) = =0. Para deduzir-se esta relação um caminho possível é o estudo de um fluxo de partículas carregadas, sob a ação de um campo eletromagnético.

Proposição V - 18

Seja (η, x, m, α) um fluxo de partículas carregadas e F um campo eletromagnético em (M,A,g) espaço-tempo. Por analogia a expressão da força de Lorentz suponha-se que $\nabla_x x = \alpha \tilde{F}x$.

Suporemos também uma equação de continuidade, isto é, que há conservação do número de partículas numa caixa causal,D, qualquer. Isto se expressa por

$$\int_{\partial D} I\ (\eta x,\ \Omega) = 0\ ,\ \forall D,\ \rightarrow \operatorname{div}(\eta x) = 0.$$

O campo eletromagnético F deve naturalmente obedecer a lei de Maxwell $\tilde{F}^J = - \operatorname{div}\ (\overline{E})$.

Afirma-se que $\operatorname{div}(\overline{T} + \overline{E}) = 0$.

Demonstração:

$$\operatorname{div}\ (\overline{T} + \overline{E}) = \operatorname{div}\overline{T} + \operatorname{div}\overline{E} = \operatorname{div}(\eta x \otimes x) + -\tilde{F}^J =$$

$$\operatorname{div}(\eta x)x + n\nabla_x - \tilde{F}(\alpha n.x) = 0$$

Veremos agora como enunciar uma lei integral de conservação de energia-momento.

<u>Teorema V - 2 (Teorema da conservação da e nergia</u>

Considere-se um modelo relativistico $\{(\eta, x, m, \alpha)F, C\}$ onde se suporá que div $(\overline{Q}) = 0$, onde $\overline{Q} = \overline{T} + \overline{E}$.

Seja H um sistema de referência e K um campo de K lling tal que $H_{|U} = K_{|U}$, U aberto de M.

Afirma-se que, para qualquer caixa causal $D \subset U$, $\int_{\partial D} I(\tilde{Q}H, \Omega) = 0$

Demonstração:

Da proposição V - 18 tem-se que, em U

$\operatorname{div}(\tilde{Q}) = 0 \rightarrow (\tilde{Q}H) = 0.$

Pela proposição V - 9

$\operatorname{div}(\tilde{Q}H) = 0 \rightarrow \int_{\partial D} (\tilde{Q}H, \Omega) = 0,$ $D \subset v$, D uma caixa causal.

Este tipo de lei é exatamente o que esperamos encontrar, interpretando $\tilde{Q}H(a)$ como a soma das densidades de energia momento para o observador instantâneo (a, H(a)), no ponto $a \in M$.

O fato de termos tido necessidade de utilizar um sistema de referência muito especial, um campo de Killing, é uma grande limitação a aplicação do teorema.

Por exemplo no caso do universo de Friedman teremos que, para qualquer H nestas condiçções, $L_H g = 0 \rightarrow L_H S = 0 = H(S) = dS(H)$.

Pela proposição V - 16, $S = (4/3)(x^4)^{-2}$ e assim $dS(H) = 0 \rightarrow dx^4(H) = 0$.

Da definição V - 16 , a métrica g do universo de Friedman e $g = f(x^4)\ \Sigma\ dx^\nu \otimes dx^\nu + dx^4 \otimes dx^4$ e $dx^4(H) = 0 \rightarrow$ H é de tipo espaço.

Este exemplo nos ilustra um caso de espaço tempo em que não há um sistema de referência nas condições do teorema da conservação da energia.

BIBLIOGRAFIA

- Adler, Ronand; Bazin, Maurice; Scheffer Menahem
  Introduction to general relativity
  Mc Graw-Hill Kogakusha, Ltd.,1965.

- Akivis, M.A.; Goldberg, V.V.
  An Introduction to Linear Algebra e Tensor
  Dover Publication, 1972

- Arnold, Vladimir Igorevic
  Metodi Matematici della Meccanica Classica
  Editori Ruiniti, 1979

- Ausladег, Louis; Mackenzie, Robert E.
  Introduction to differentiable Menifolds
  Dover Publication, 1963

- Barbosa, João Lucas M.
  Geometria Diferencial e Cálculo das Variações
  10º Colóquio Brasileiro de Matemática
  IMPA, 1975.

- Barone, Jr Mário; Mello, A. H.
  Equações Diferenciais
  IME, 1979

- Bergmann, Peter Gabriel
  Introduction to the theory of relativity
  Dover Publications, 1942

- Bishop, Richard L.; Cittenden, Richard J.
  Geomethry of Manifolds
  Academic Press, 1964

- Banola, Roberto
  Non-Euclidean Geometry
  Dove Publication, 1912

- Boothby, Willian M.
  An Introduction to differentiable manifolds and Riemanni an geometry
  Academic Press, 1975

- Born Max
  La thēorie de la relativitē et ses bases physiques
  Gauthier- Villars et c^{le}, 1923

- Do Carmo, Manfredo Perdigão
  Geometria Riemanniana
  IMPA, 1979

- Do Carmo, Manfredo Perdigão
  Differential Geometry of Curves and Surfaces
  Prentice-Hall, 1976

- Cartan, Elie
  The theory of spinore
  M.I.T. Press, 1966

- Cartan, Elie
  Leçons sur la gēomētrie des espaces de Riemann
  Gauthier - Villars, 1946

- Croom, Fred H.
  Basic Concepts of algebraic topology
  Springer Verlay, 1978

- Corduneanu, C.
  Principles of differential and Integral Equations
  Allyn and Bacon, Inc., 1971

- Dewitt, B.S.
  Relativity Groups and topology
  Blackie and Son Limited, 1964

- Drechsler, W.; Maker, M.E.
  Fiber bunde thecnique in gauge theorie
  Lecture note in phisics - 67
  Springer Werlog, 1977

- Dobson, C.T.J.; Poston, T.
  Tenson geometry
  Pitman, 1977

- Dugundji, James
  Topology
  Allyn and Bacon, Inc., 1966

- Eguchi, Tohau; Gilkey, Peter P.; Hanson, Andrew J.
  Gravitation, gauge teories and differnetial geometry
  Phisics Reports(66), 1980

- Einstein, A.; Lorentz, H.A.; Minkowski, H.
  O Princípio da Relatividade
  ~~Textos fundamentais da~~ física moderna, vol. I
  Fundação Calouste Gulbenkian, 1958

- Flanders, H.
  Differential form with application to the phisical sciences.
  Academic press, 1966

- Francisco, Gerson
  Gravitação e teorias de gauge
  Tese de Mestrato IFT, 1980

- Frankel, Theodore
  Gravitacional Curvature
  W.H. Freeman and Company, 1979

- Felsager, Bjørn
  Geometry, Particles and fields
  Odense University Press, 1981

- Gemignani, Michael C.
  Elementary topology
  Addison Wesley Publishing Company, 1967

- Greemberg, Marvin J.
  Lectures on algebraic topology
  W.A. Benjamin, Inc., 1967

- Halmos, Paul R.
  Espaços vetoriais de dimensões finita
  Campus, 1978

- Hawking, S.W., Ellis, G.T.
  The large scale structure of space-time
  Cambridge University Press, 1973

- Hermann, Robert
  Vector bundles in mathematical physics,vol. I
  W.A.Benjamin, INC., 1970

- Hermann, Robert
  Topics in General Relativity
  Math Sic Press Interdisciplinary Mathematics,vol.V,1973

- Hewitt, Edwin; Stromberg, Karl
  Real and abstract analysic
  Springer-Verlag, 1969

- Hicks, Nocl J.
  Notes on differential geometry
  D.van Nostrand Company, Inc., 1965

- Hocking, John G.; Yong, Gail S.
  Topology
  Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967

- Hoffmann, Kenneth; Kunze, Ray
  Algebra Linear
  Livros Técnicos e Científicos, 1976

- Kobayashi, S.; Nomizu, K.
  Fundations of differential geometry (vol. I,II)
  Interscience, 1969

- Lima, E.L.
  Curso de anãlise, vol. II
  Projeto Euclides CNPq, 1976

- Nomizu, Katsumi
  Lie Groups and differential geometry
  The mathematical society of Japan, 1956

- Oliva, Waldyn Muniz
  Equações diferenciais ordinãrias
  IMPA, 1973

- O'Neill, Barret
  Elementary differential geometry
  Academics Press, 1966

- Papetrou, A.
  Lectures on general relativity
  D. Reidel Publishing Company, 1974

- Penrose, Roger
  Tecniques of differential topology in relativity. Regional conference series in opered mathematics, society for industrial and applied mathematics,1972.

- Postnikov, M.
  Lectures in geometry linear algebra and differential geometry
  Mir Publishers, 1982

- Richtmyer, Robert D.
  Principles of advanced mathematical physics (2 vol.)
  Springer- Verlay, 1981

- Rudin, Walter
  Principles of mathematical analysis
  Mc Graw-Hill Book company, 1964

- Rudin, Walter
  Real and Complex analysis
  TMH edition, 1974.

- Sachs, R.K.; Wu, H.
  General relativity and cosmology
  Bulletin Amer. Math. Soc. 83, 1977

- Sachs, R.K.; Wu, H.
  General relativity for matematicions
  Graduate texts im mathematics 48
  Springer verlag 77

- Schroer, Bart
  Differentiable Manifolds and fibre bundles
  Apostila de aula IFUSP, 1980.

- Schutz, Bernard
  Geometrical Methods of mathematical physics
  Cambridge University Press, 1980

- Schwarzschild, Mârtin
  Structure and evolution of the stars
  Dover Publications, Inc., 1965

- Seifert, H.; Threlfall, W.
  Lehrbuch der topologie
  Leipzig, 1934

- Shilov, G.E. ; Garevich, B.L.
  Integral, Measure and derivative: a unified approach.
  Dover publications, Inc., 1977

- Spivak, M.
  Calculun on manifolde
  W.A. Benjamin , 1965

- Spiv k, M.
  A comprehensive introduction to differential geometry (5 vols.)
  Sublesh or Perish, 1975

- Steiner, J.E. (Coordenador)
  Astronomia e Astrofīsica (2 volumes)
  IAG USO, 1978

- Sternberg Shlomo
  Lectures on differential geometry
  Printice - Hall - Inc, 1967

- Stoker, J.J.
  Differential Geometry
  Wiley-Interscience, 1969

- Warner, Frank W.
  Fundations of differentiable monifolder and lie grups
  Scott, Foresman and Company, 1971

- Weinberg, Steven
  Gravitation and cosmology : Principles and applications of the general theory of relativity
  John Wily e Sons , 1972

- Westenholz C. von
  Differential forms in mathematical physics
  North Holland publishing Company, 1981

- Zeldovich, Y.B.
  Relativistic Astrophysics
  University of Chicago Press, 1971