La physique d'Einstein,
texte inédit de Georges Lemaître

La physique d'Einstein, texte inédit de Georges Lemaître

édité par
Jean-François Stoffel
Aspirant F.N.R.S.

La physique d'Einstein est un manuscrit dactylographié inédit de 131 pages, daté du 31 mai 1922 et conservé aux «Archives Lemaître». Ce texte fait l'objet de la communication du Prof. Lucien Bossy. L'objectif de la présente publication n'est pas d'en fournir une édition critique et commentée –laquelle trouverait mieux sa place dans une édition complète des œuvres de ce savant–, mais plus modestement de mettre ce texte à la disposition des chercheurs et d'attirer leur attention sur ces archives dont la richesse mérite d'être exploitée. La publication qui suit est fidèle au document originel: elle signale en note les corrections manuscrites apportées à la dactylographie, lorsque celles-ci affectent le sens du texte ; les corrections de fautes de frappe manifestes ne sont pas reprises.

* * *

Au seuil de cette édition, qu'il me soit permis de remercier le Prof. André Berger et Madame Liliane Moens, responsables des «Archives Lemaître» (Université catholique de Louvain, Institut d'astronomie et de géophysique Georges Lemaître, Louvain-la-Neuve), qui ont aimablement autorisé la publication de ce texte. J'exprime également ma gratitude au Prof. Patricia Radelet, qui a relu les épreuves et j'adresse mes remerciements à M^{lle} Cathy Brichard qui s'est chargée de la frappe des nombreuses équations que comporte ce texte.

Table des matières

Introduction

[p. I] Nous pourrions concevoir un univers où vivraient des hommes semblables à nous, mais où régnerait un génie malfaisant, maître des lois de la nature et qui s'amuserait à les changer dès que quelque savant serait sur le point de les découvrir. Quelle pourrait bien être la physique de ces infortunés ? Chaque génération dénoncerait les erreurs des anciens ; les expériences effectuées jadis, donneraient aujourd'hui des résultats totalement différents de ceux que décrivent les mémoires de leurs auteurs ; peut-être un jour l'humanité renoncerait-elle à connaître la vérité en devinant le maléfice dont elle est la victime impuissante.

Cette fiction montre clairement la première condition que suppose l'existence d'une science expérimentale : nos expériences et celles de nos ancêtres doivent nous servir ; nous devons pouvoir nous adapter à l'univers où nous vivons : cela n'est possible que si nos sens peuvent reconnaître une série de sensations analogues à d'autres dont la mémoire garde le souvenir et dont nous attendons la succession régulière dès que nous en reconnaissons le commencement.

De temps en temps, une modification se produit dans l'ordre habituel ; elle attire notre attention, nous en cherchons la cause, nous cherchons à la rattacher à quelque fait nouveau qui nous avait échappé : petit-à-petit nous organisons notre connaissance de l'univers, connaissance vulgaire d'abord, connaissance scientifique ensuite, poursuivant plus attentivement l'œuvre de notre éducation, en utilisant l'expérience accumulée pendant de longs siècles et transmise précieusement de génération en génération.

La constance du monde physique ne suffirait pourtant pas à notre adaptation à l'univers et au développement de notre science expérimentale.

Il faut encore que des relations semblables se produisent assez [p. II] souvent dans la suite des phénomènes et soient assez simples pour que nous puissions les remarquer. Ceci est nécessaire, non seulement au début de notre éducation, mais à chaque étape du développement de la science. Nous devons procéder par étapes successives : les anomalies qui surgissent dans le vaste champ des phénomènes expliqués, doivent être assez simples et assez fréquentes pour pouvoir être formulées en quelque loi nouvelle. Celle-ci étendra le domaine des faits que nous comprenons, que nous pouvons prévoir ou produire à volonté.

Toutes ces lois empiriques s'accumulent ; leur ensemble finit par devenir aussi complexe et inextricable que dut apparaître à nos yeux d'enfant le monde sensible que nous débrouillons si facilement maintenant. Il faut synthétiser ces lois éparses : sinon nous ne pourrons même plus les connaître, ni les retenir, et le progrès de la science sera bien vite arrêté.

De nouveau, il faut que cela soit possible. Il faut qu'une simplicité supérieure domine la variété des phénomènes et la multiplicité des lois. C'est au génie du savant à deviner le point de vue d'où la multiplicité se résoudra dans une synthèse plus vaste. Dans cet effort d'unification il devra généralement sacrifier la simplicité de certaines lois partielles à la simplicité plus profonde d'une loi générale. Les lois simples de Mariotte et de Gay-Lussac, premières étapes de notre connaissance des propriétés des gaz, disparaissent devant la simplicité plus compréhensive de la théorie cinétique, qui nous fait mieux connaître les propriétés des gaz en même temps qu'elle nous permet d'atteindre celles des vapeurs et des liquides.

Le progrès scientifique est la découverte d'une simplicité plus compréhensive, d'un point de vue augmentant l'étendue du domaine réduit à l'unité. Les succès passés nous donnent confiance dans l'avenir de la science : nous prenons de plus en plus conscience que l'univers est intelligible. **[p. III]** Les formes infiniment variées des phénomènes se laissent comprendre dans quelques énoncés clairs, dans quelques formules qui en découvrent le cours régulier et permettent d'en prévoir la succession lorsque les conditions initiales sont connues.

Nous allons parcourir les grandes étapes de cette emprise de l'intelligence humaine sur l'univers si merveilleusement adapté à toutes les formes de notre activité. Nous verrons mieux ainsi la place qu'occupe l'œuvre d'Einstein dans le développement de notre connaissance et le pas qu'il nous fait franchir vers l'unité.

* * *

Les premières notions que se forme l'enfant, du monde où il commence à vivre, sont sans doute d'ordre géométrique. Nous sommes constamment en contact avec des objets qui se présentent sous le même aspect : nous nous habituons à les revoir et à les reconnaître : nous remarquons l'identité des mouvements nécessaires pour les atteindre ou les palper. Leur forme doit être une des premières notions que nous en abstrayons.

Quelle que soit la valeur de cette opinion sur la genèse de notre connaissance sensible, c'est par l'établissement de la géométrie qu'a débuté la connaissance scientifique de l'humanité. La géométrie, définitivement systématisée par Euclide, domine toute la science grecque. La constance de la forme des corps solides est une des plus immédiates que nous présente la nature. La notion de distance s'en abstrait immédiatement et les relations entre les distances sont assez simples pour avoir été découvertes les premières.

L'astronomie des grecs était toute entière dominée par le besoin de simplicité géométrique : il fallait que le mouvement des astres soit un mouvement simple ou une combinaison de mouvements simples. En fait, ils parvinrent à un échafaudage fort compliqué de mouvements relatifs **[p. IV]** circulaires et uniformes qui dut vraisemblablement les satisfaire assez peu. Le triomphe du point de vue géométrique dans l'explication des phénomènes astronomiques fut la découverte du mouvement elliptique des planètes : les lois de Képler font décrire aux planètes un mouvement d'une simplicité idéale qui aurait sans doute ravi l'esprit géométrique des grecs.

Comment pouvons-nous considérer comme un progrès, dans l'intelligence de la simplicité du monde, le remplacement de ces trajectoires idéales par la courbe infiniment compliquée que l'observation plus précise nous a révélée et qui résulte des calculs des perturbations que Newton nous a fait connaître ? N'avons-nous pas fait un pas en arrière ? Nous avons perdu la simplicité du mouvement Keplerien, mais c'est pour atteindre une simplicité plus profonde et infiniment plus féconde, celle de la mécanique et des lois d'attractionde Newton. Les corps s'attirent, leur mouvement peut se calculer quand on en connaît les données initiales ; il suffit d'intégrer les équations générales de la mécanique.

La mécanique a dominé la physique comme la géométrie avait dominé l'astronomie des grecs, on chercha partout des actions à distance. La loi de Coulomb calquée sur la loi de l'attraction universelle exprima l'action réciproque des masses électriques. On espéra même un moment pouvoir ramener toute la physique à la mécanique, mais les phénomènes électriques se montrèrent rebelles à cette tentative. Sous l'influence des idées Newtoniennes, toute l'attention s'était portée d'abord sur les masses électriques et les conducteurs du courant. Faraday montra bientôt l'influence des diélectriques ; le champ apparut comme une réalité répandue dans le milieu ; les masses électriques ou les aiguilles aimantées décelaient sa présence mais il existait en dehors d'eux. Maxwell découvrit les équations différentielles qui **[p. V]** rendent compte des propriétés des champs. Ses idées furent définitivement confirmées par la découverte des ondes hertziennes.

* * *

La physique s'est ainsi développée en trois grandes étapes : la mécanique utilisant la géométrie, l'électricité utilisant la géométrie et la mécanique. Les développements nouveaux n'avaient en rien modifié les parties plus anciennes de la science, et celles-ci s'étaient développées de leur côté d'une manière aussi indépendante que possible. Aussi, les trois étages de la science présentent-ils des caractères très différents, presqu'opposés. La géométrie apparaît comme une réalité indépendante de toutes les vicissitudes de la matière : les corps sont dans l'espace ; il semble que l'espace existe de tout temps, attendant les corps qui vont pénétrer dans telle ou telle de ses parties, puis la quitter sans rien changer à ses propriétés.

Les actions électriques se transmettant avec une vitesse finie, la mécanique classique nous parle encore d'actions à distance instantanées. Pouvons-nous conserver l'ancienne théorie du potentiel de gravitation à côté des potentiels retardés de Lorentz ? La mécanique ne devrait-elle pas subir le contre-coup, des transformations de l'électricité ? Les développements récents ne doivent-ils pas réagir sur les branches plus anciennes ? L'ensemble ne gagnera-t-il pas ainsi en simplicité ?

C'est cette unification qu'a tentée Einstein. Il montre que les lois physiques prennent une forme plus profondément simple dans leur ensemble lorsqu'on admet une certaine influence des phénomènes électriques sur les phénomènes mécaniques, et l'influence des uns et des autres sur les propriétés des règles matérielles. Les synthèses partielles se fondent dans une synthèse plus vaste ; la simplicité de la géométrie euclidienne et de la mécanique classique disparaissent ; elles doivent être sacrifiées à la simplicité de l'ensemble de la physique, comme la simplicité des lois de Képler a été jadis abandonnée sans regret devant la synthèse de Newton. **[p. VI]**

La méthode d'Einstein est fort simple.

Dans l'étude d'un phénomène, nous sommes bien forcés d'adjoindre au fait que nous étudions des éléments subjectifs qui nous permettent de le connaître. À côté de l'objet, nous devons considérer un observateur qui repère à chaque instant la position des divers points et les modifications qui s'y présentent. En cherchant à résumer les observations en une formule intelligible, nous ne pouvons distinguer dans la simplicité de la loi, le caractère plus ou moins subjectif de cette simplicité. Elle est peut-être tout-à-fait artificielle. Elle provient non de l'objet mais de l'observateur particulier que nous avons dû lui adjoindre et du mode de repérage qu'il a employé.

Einstein dénonce la *relativité* de l'observateur.

Un phénomène peut être observé par un observateur quelconque. Un objet peut être repéré d'une infinité de manières. La simplicité d'une loi sera vraiment objective lorsqu'elle subsiste, quel que soit le mode de repérage employé.

Les équations qui expriment une loi physique doivent garder leur forme algébrique, lorsqu'on fait un changement arbitraire de coordonnées.

C'est le *principe de relativité.*

Les propriétés qu'il atteint sont débarrasées [sic], aussi complètement qu'il est possible, de tout caractère subjectif. Aussi, l'instrument mathématique qui permet d'en réaliser le programme porte-t-il le nom de calcul différentiel *absolu* (on l'appelle aussi calcul tensoriel). Il détermine les diverses formes possibles des lois physiques en accord avec le principe de relativité. Il reste alors à voir ce que deviennent ces lois lorsqu'on emploie le mode de repérage des événements utilisé par les expérimentateurs et à choisir, parmi les diverses lois possibles, celles qui rendent compte de leurs observations.

On obtient ainsi des lois vraiment objectives, et on peut légitimement espérer qu'elles rendront plus parfaitement compte des faits observés et en feront découvrir de nouveaux.

Chapitre I : L'espace et le temps

§ 1. La géométrie générale de Riemann

[p. 1] La géométrie dut vraisemblablement son origine à des besoins d'ordre expérimental, tels que la nécessité de mesurer des terrains, mais elle se dégagea bientôt de ce caractère empirique et nous apparaît déjà avec Euclide sous une forme très systématique. Elle s'est rendue indépendante des faits expérimentaux qui lui avaient donné naissance ; des postulats nettement énoncés la séparent des faits contingents et toute la théorie s'en déduit sans nouvel appel à l'expérience. Depuis, ce caractère s'est accentué. Les discussions soulevées par les essais de démonstration du fameux postulat des parallèles ont conduit à des géométries bien différentes de celle que nous suggérait notre intuition de l'espace. En modifiant l'un ou l'autre des postulats, on obtenait des géométries égales en valeur logique à celle d'Euclide et dont l'application au monde physique, quoique moins commode, restait encore possible.

L'expérience peut-elle décider entre ces différentes formes de la géométrie ? Est-il possible de réaliser une expérience géométrique ?

Il n'y a pas d'être qui soit purement géométrique : tous ont, à côté de leurs propriétés géométriques, d'autres propriétés physique ; et les expériences vont dépendre des unes et des autres. Si on réalisait un triangle matériel dont la somme des angles fût plus grande que deux droits, il resterait à prouver que ses côtés sont rectilignes : on pourrait le faire, par exemple en les superposant deux à deux, puis en recommençant, en en retournant un. Mais, comment saurait-on s'ils ne se sont pas déformés pendant l'opération. On pourrait toujours prétendre que la géométrie est euclidienne. Le triangle dont la somme des angles est plus grande que deux droits est un triangle curviligne. Ses côtés se sont déformés pendant les opérations par lesquelles on voulait prouver qu'ils sont droits.

Tout ce que l'expérience peut nous faire vérifier c'est une géométrie et le reste de la physique et nous pouvons toujours choisir ce reste de manière **[p. 2]** à rendre n'importe quelle géométrie conforme à l'expérience. Nous pouvons, par exemple, choisir la géométrie la plus simple, la géométrie euclidienne et il sera possible d'établir la physique sur cette géométrie.

Mais sommes-nous bien sûrs qu'à la géométrie la plus simple correspondra la physique la plus simple ? Ce qui nous importe n'est pas la simplicité d'une partie de l'édifice, c'est la simplicité de l'ensemble. Ne serait-il pas plus sage de chercher à profiter de la forme arbitraire que peut prendre la géométrie, pour simplifier l'ensemble de la physique et ne pas craindre de compliquer quelque peu des parties bien connues comme la géométrie, si nous pouvons faciliter ainsi l'exploration de régions nouvellement découvertes ?

* * *

La géométrie générale de Riemann est la généralisation toute naturelle de la géométrie d'Euclide suivant le procédé usité dans toutes les branches de la physique mathématique. On l'obtient en admettant que la géométrie d'Euclide n'est généralement plus valable dans un domaine fini mais qu'elle subsiste à la limite dans un domaine infiniment petit. Autrement dit, il est toujours possible de trouver un domaine assez petit, pour que les relations métriques de la géométrie d'Euclide y soient valables avec une approximation donnée.

Les notions géométriques courantes ne sont plus applicables qu'à la limite, c'est ainsi qu'il est généralement impossible de construire des figures superposables de dimensions finies. Lorsqu'on veut conserver la possibilité de superposer des figures géométriques, on obtient des cas particuliers remarquables de la géométrie pour lesquels l'espace est homogène. Leur ensemble est souvent appelé géométrie générale ; ce n'est pourtant qu'un cas particulier de la géométrie générale que nous étudions ici pour laquelle l'espace n'est pas nécessairement homogène. Il comprend la géométrie d'Euclide, la géométrie non-euclidienne proprement dite de **[p. 3]** Bolyai-Lobatschefsky que l'on obtient en rejetant le fameux postulat des parallèles et enfin la géométrie sphérique qui étend à l'espace les propriétés de la sphère et qu'on appelle souvent géométrie de Riemann, au sens étroit. Einstein et Weyl emploient toujours l'expression géométrie de Riemann au sens large pour désigner la géométrie générale telle que nous l'étudions ici. Lorsqu'ils veulent exprimer le sens étroit ils parlent d'espace ou de géométrie sphérique.

* * *

À première vue, il paraît bien étrange que l'on puisse construire une géométrie où la superposition des figures soit une chose impossible ; nous sommes habitués à définir l'égalité par une telle superposition et elle nous paraît une notion fondamentale. Nous savons pourtant que l'on peut mesurer la longueur d'un arc de courbe, bien qu'il soit impossible de le faire coïncider avec le mètre rectiligne qui sert d'unité, ni d'en faire coïncider exactement une partie aussi petite que l'on veut avec une partie du mètre. On peut concevoir la réalisation de cette mesure de la manière suivante : on se sert, par exemple, d'un compas dont on applique les pointes sur l'arc à mesurer, on déplace le compas, une pointe restant en un point, l'autre marquant un nouveau point ; on le porte ainsi, un certain nombre de fois sur l'arc. Les extrémités de l'arc n'auront généralement pas été toutes deux touchées par les pointes, mais il sera impossible de marquer sur l'arc de nouveaux points. On cherche de même combien de fois on peut porter le compas sur le mètre unité. Le rapport des deux nombres obtenus tend vers une limite lorsque l'ouverture du compas tend vers zéro ; cette limite mesure la longueur de l'arc.

Il faut pour cela que le compas ne se déforme pas pendant les opérations, ou, si on préfère imaginer une série de compas ayant deux à deux une pointe en contact, il faut que ces compas puissent être superposables. Il suffit naturellement que les pointes soient superposables. Cette superposition ne doit d'ailleurs être définie qu'à la limite lorsque les deux pointes tendent l'une vers l'autre. Il suffit donc que les notions de la géométrie d'Euclide soit [sic] **[p. 4]** applicables à la limite dans un domaine infiniment petit.

* * *

Cette définition de la distance par superposition d'un instrument de mesure tel qu'un compas est parfaitement adaptée à la mesure des distances, mais elle ne nous apprend pas ce qu'est la distance. Il est bien clair que lorsqu'on introduit un compas dans un milieu, la distance entre les points de ce milieu existait avant qu'on introduise le compas au moyen duquel on peut la mesurer. Il doit y avoir une réalité physique qui est mesurée par la distance, de même que la température est mesurée par un thermomètre mais subsiste là où il n'y a pas de thermomètre. D'une manière analogue l'aiguille aimantée explore le champ magnétique et ne le crée pas.

Si nous nous plaçons à ce point de vue, nous devons admettre qu'il y a une réalité physique répandue dans l'espace et dont la distance est une manifestation : il y a un champ métrique qui s'explore avec un compas, comme un champ magnétique s'explore avec une boussole et nous pouvons nous attendre à ce que cette réalité dont nous connaissons l'aspect métrique intervienne dans des phénomènes physiques d'un autre ordre.

La notion d'égalité des éléments de distance doit donc avoir un sens physique indépendant des instruments avec lesquels nous mesurons cette distance.

Pour pouvoir aborder l'étude de cette réalité physique, il faut que nous repérions la position des points. Nous assignerons à chaque point trois nombres (*x1*, *x2*, *x3*.) ses coordonnées. De plus à une suite continue de points doit correspondre une variation continue de leurs coordonnées. À part ces restrictions générales d'univocité et de continuité, le mode de repérage employé est totalement indifférent.

L'égalité des distances nous apprend qu'une certaine grandeur physique caractérisée par chaque couple de points est égale pour chacun d'eux. Cette grandeur dépend pour chaque couple des coordonnées des deux points **[p. 5]**, coordonnées qui doivent être considérées comme infiniment voisines puisque l'égalité n'est définie qu'à la limite lorsque chaque distance tend vers zéro. C'est donc une fonction des coordonnées et des différentielles des coordonnées.

Quelle peut-être la forme de cette fonction ?

Il est clair qu'elle doit être homogène par rapport aux différentielles. De plus, elle ne doit pas changer lorsqu'on change le signe des différentielles, car, elle ne peut dépendre de l'ordre dans lequel on considère les points. Enfin, elle doit pouvoir être employée quelque soit la manière dont on repère les points, elle doit donc garder sa forme algébrique lorsqu'on fait un changement arbitraire des coordonnées.

La fonction la plus simple qui vérifie ces conditions est une forme quadratique des différentielles des coordonnées.

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{11}dx_1^2+ & 2\gamma_{12}dx_1dx_2 & +2\gamma_{13}dx_1dx_3 \\ + & \gamma_{22}dx_2^2 & +2\gamma_{23}dx_2dx_3 \\ & & +\gamma_{33}dx_3^2 \end{array}$$

Les couples de points équidistants sont alors ceux dont les coordonnées font rendre une même valeur à cette fonction.

La distance mesurée sur un arc de courbe peut être utilisée comme une des coordonnées repérant les points de cet arc. Il faut donc que d'élément [sic] de distance $d\sigma$ soit un infiniment petit de même ordre que les différentielles des coordonnées.

On devra donc poser

$$d\sigma^2 = \sum_\mu \sum_\nu \gamma_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3) \tag{1}$$

avec

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}$$

La longueur d'un arc de courbe s'exprimera alors par l'intégrale curviligne

$$\int d\sigma = \int \sqrt{\sum_{\mu}\sum_{\nu}\gamma_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}} \cdot d\lambda \tag{2}$$

où les dérivées se calculent d'après les équations paramétriques de la courbe sur laquelle se fait la mesure

$$x_\mu = \varphi_\mu(\lambda)$$
$$(\mu = 1, 2, 3)$$

[p. 6] Les propriétés géométriques du milieu sont donc définies par la valeur en chaque point des six fonctions des coordonnées $\gamma_{\mu\nu}$; ce sont des potentiels du champ métrique. Ces fonctions sont naturellement supposées continues. Ceci veut dire qu'on peut toujours déterminer autour d'un point un domaine assez petit de telle sorte que, dans ce domaine, les potentiels diffèrent de leur valeur en ce point de moins qu'une quantité donnée. Nous allons montrer que lorsque les potentiels sont constants la géométrie est euclidienne. On pourra donc conclure que les relations de la géométrie euclidienne sont valables à une approximation donnée dans un domaine suffisamment petit. Cette propriété caractérise la géométrie générale de Riemann.

Une forme quadratique à coefficients constants peut, par une transformation linéaire des coordonnées, être mise sous la forme d'une somme algébrique de carrés. Le calcul est le même que celui de la réduction des quadriques. On peut en effet considérer dx_1, dx_2, dx_3 comme les coordonnées cartésiennes d'un point : l'équation (1) représente alors pour une valeur donnée de $d\sigma$ une quadrique dont l'équation réduite est de la forme

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3}$$

où on a posé

$$
\begin{aligned}
dx &= \sum_\sigma a_\sigma dx_\sigma \\
dy &= \sum_\sigma b_\sigma dx_\sigma \\
dz &= \sum_\sigma c_\sigma dx_\sigma
\end{aligned}
$$

a_σ, b_σ, c_σ désignant des constantes convenables.

L'équation (3) exprime le théorème de Pythagore étendu à l'espace ; elle définit l'élément de distance de la géométrie euclidienne.

* * *

Les diverses notions géométriques de droite, d'angle etc, peuvent facilement être étendues à la géométrie générale. Il suffit de trouver **[p. 7]** une définition qui soit indépendante d'un choix particulier du mode de repérage des points et qui coïncide avec les notions euclidiennes lorsque $d\sigma^2$ se réduit à la forme (3).

La droite est une ligne définie par deux de ses points, c'est le plus court chemin entre ces deux points ; on en obtient l'équation en appliquant les méthodes du calcul des variations à l'équation

$$
\delta \int d\sigma = 0 \tag{4}
$$

où les limites sont supposées constantes.

La droite est définie par les coordonnées d'un de ses points et les différentielles des coordonnées en ce point.

La notion de perpendiculaire peut se définir de la manière suivante.

Considérons deux directions

$$\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$$

et

$$dx_1, dx_2, dx_3$$

L'ensemble de ces deux directions s'appelle un angle.

Les deux directions sont dites perpendiculaires si l'angle qu'elles forment est identique à l'angle qu'on obtient en remplaçant une des deux directions par la direction opposée.

Considérons la forme bilinéaire associée à la forme fondamentale (1)

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu}\gamma_{\mu\nu}dx_{\mu}\delta x_{\nu}$$

Cette forme est invariante ; si on fait un changement quelconque des coordonnées

$$\begin{aligned} dx_{\mu} &= \sum_{\sigma}\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}dx'_{\sigma} \\ \delta x_{\nu} &= \sum_{\tau}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}}\delta x'_{\tau} \end{aligned}$$

elle se transforme en

$$\sum_{\sigma}\sum_{\tau}\gamma'_{\sigma\tau}dx'_{\sigma}\delta x'_{\tau}$$

où

$$\gamma'_{\sigma\tau}=\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}}\gamma_{\mu\nu} \tag{5}$$

Les coefficients se transforment de la même façon que ceux de la forme quadratique qu'on obtiendrait en remplaçant δx_{ν} par dx_{ν}.

Pour que les deux directions soient perpendiculaires, la forme **[p. 8]** bilinéaire ne doit pas changer lorsqu'on change le signe des δx_{ν}. Il faut pour cela qu'elle soit nulle. La condition de perpendicularité est donc

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu}\gamma_{\mu\nu}dx_{\mu}\delta x_{\nu}=0 \tag{6}$$

Dans le cas de la géométrie euclidienne (3), on retrouve l'équation bien connue

$$dx\delta x+dy\delta y+dz\delta z=0$$

L'angle de deux directions s'exprime par la formule

$$\text{(7)} \qquad \cos\theta = \frac{\sum_\mu \sum_\nu \gamma_{\mu\nu} dx_\mu \delta x_\nu}{\sqrt{\sum_\mu \sum_\nu \gamma_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}\sqrt{\sum_\mu \sum_\nu \gamma_{\mu\nu} \delta x_\mu \delta x_\nu}}$$

Cette expression est une combinaison d'invariants et elle se réduit à la forme classique dans le cas de la géométrie euclidienne.

Enfin, l'élément de volume s'écrit

$$\text{(8)} \qquad \sqrt{\gamma} dx_1 dx_2 dx_3$$

où γ représente le déterminant symétrique formé au moyen des potentiels. Cette expression se réduit au produit des différentielles dans le cas de la géométrie euclidienne. C'est un invariant : en effet, d'après (5) et les propriétés des déterminants,

$$\gamma' = |\gamma'_{\sigma\tau}| = |\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}|^2 \gamma$$

mais

$$dx_1 dx_2 dx_3 = |\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}| dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

On a donc bien

$$\text{(9)} \qquad \sqrt{\gamma} dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{\gamma'} dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

On peut se faire une représentation assez simple des conséquences de l'adoption de la géométrie générale pour l'étude de la physique, en la comparant avec la géométrie euclidienne des surfaces. Soient

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(u_1, u_2) \\ x_2 &= f_2(u_1, u_2) \\ x_3 &= f_3(u_1, u_2) \end{aligned}$$

les équations paramétriques d'une surface ; à tout couple de valeurs des paramètres u_1 et u_2 correspond un point sur la surface, ces paramètres déterminent donc les points de la surface et peuvent être considérés comme leurs coordonnées. L'élément de distance euclidienne **[p. 9]** s'exprime en fonction des x_i par l'expression (3).

Différentions les équations de la surface

$$dx_i = \frac{\partial f_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2} du_2$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

et portons ces valeurs dans (3), nous obtenons une expression de la forme

$$d\sigma^2 = \gamma_{11} du_1^2 + 2\gamma_{12} du_1 du_2 + \gamma_{22} du_2^2 \tag{10}$$

où γ_{11}, γ_{12}, γ_{22} sont des fonctions des u_1 et u_2 Cette expression analogue à (1) montre que la géométrie euclidienne sur une surface quelconque est équivalente à la géométrie générale de Riemann à deux dimensions.

Il devait d'ailleurs en être ainsi ; car la géométrie de Riemann suppose simplement que la géométrie euclidienne est valable à la limite dans un domaine infiniment petit et il est clair que la géométrie de figures tracées sur une portion de surface dont l'aire tend vers zéro se confond à la limite avec celle des projections de ces figures sur le plan tangent à la surface.

La géométrie de la sphère nous est bien connue. On peut en effectuant uniquement des mesures sur la sphère se rendre compte de la courbure de la surface ; on ne pourra pourtant pas savoir ainsi si la surface sur laquelle on se trouve est concave ou convexe, mais on constatera simplement qu'elle est courbe. Des hommes qui ne sauraient pas que la lumière se propage en ligne droite et pour qui toutes les mesures géométriques se réduiraient à arpenter la surface de la terre, pourraient bien constater que la terre est ronde, ils pourraient en faire le tour, ils pourraient tracer le plus court chemin entre trois villes et constater que la somme des angles du triangle ainsi déterminé est supérieure à deux droits, mais ils ne pourraient savoir s'ils se trouvent sur une sphère pleine ou dans une sphère creuse de même rayon. Les propriétés spatiales qu'ils pourraient découvrir se rattachent à la valeur de la courbure totale de la surface, ou courbure de Gauss qui dans le cas de la sphère est égale à **[p. 10]** l'inverse du carré du rayon.

Sur la sphère la courbure est constante ; aussi, les figures qu'on y trace sont-elles superposables ; on peut étudier l'égalité des triangles sphériques de la même manière que celle des triangles plans. Si nous étudions la géométrie euclidienne d'une surface à courbure variable, une éllipsoïde à trois axes inégaux, par exemple, une pareille méthode serait inutilisable, il serait impossible de déplacer une figure sur l'éllipsoïde sans la déformer. Les figures qu'on y trace ont pourtant encore des propriétés géométriques, longueurs, angles, surfaces etc. On peut les étudier directement par les méthodes de la géométrie générale en se servant de l'expression de $d\sigma$ au moyen de coordonnées quelconques.

La géométrie générale à trois dimensions est appelée par comparaison avec la géométrie des surfaces quelconques, une géométrie d'un espace à courbure variable ; on peut chercher les grandeurs dont dépendent les propriétés géométriques de cet espace et qui généralisent la courbure de Gauss des surfaces. Le mouvement sans déformation d'un solide y est aussi impossible que le déplacement sans déformation d'une figure sur un ellipsoïde à axes inégaux, et cependant les grandeurs géométriques, longueur, droite, angle, volume etc. peuvent y être définies et peuvent être étudiées tout aussi bien que dans un espace euclidien.

Remarquons enfin que de même qu'on peut faire la carte d'une sphère ou d'un ellipsoïde sur un plan, on peut faire la carte d'un espace Riemannien dans un espace euclidien ; il suffit de considérer les coordonnées x_1, x_2, x_3, comme des coordonnées cartésiennes de cet espace. La forme $d\sigma^2$ (I) déterminera alors l'échelle de la carte dans chaque direction et jouera le même rôle que l'équation (10) dans l'étude des cartes géographiques.

[p. 11] On dira alors que tout se passe comme si l'étalon de longueur se déformait lorsqu'on change sa direction et l'on pourra décrire le caractère de l'espace en chaque point par la forme (I) de l'ellipsoïde des échelles. Bien entendu une pareille description dépendra en partie de la manière dont on a fait la carte. On pourra considérer des cartes conformes, pour lesquelles l'éllipsoïde des échelles se réduit à une sphère de rayon variable d'un point à l'autre, qui conservent les angles ou des cartes équivalentes, où le volume de l'éllipsoïde est constant et qui conservent les volumes (il faut pour cela comme dans le cas des cartes planes que le déterminant des $\gamma_{\mu\nu}$ soit égal à une constante. Nous voyons donc qu'il n'y a aucune difficulté à se représenter un espace Riemannien ; il suffit d'en faire la carte dans un espace euclidien dont l'expérience courante nous a donné l'intuition.

Toutes les formes de la géométrie générale sont applicables à l'étude du monde physique ; on peut choisir la forme de la géométrie qui se prête le mieux à l'étude de la physique, comme on choisit le système de coordonnées qui se prête le mieux à l'étude d'un problème de géométrie analytique.

Toutes sont d'ailleurs aussi commodes au point de vue pratique du moment que la géométrie euclidienne est valable à l'approximation de nos mesures dans le domaine bien petit où s'étendent nos laboratoires et nos instruments.

§ 2. Le temps et la mécanique

[p. 12] Que voulons-nous exprimer lorsque nous disons qu'il s'écoule le même temps, entre le passage de l'aiguille de notre montre, d'un chiffre quelconque du cadran au chiffre voisin ? Qu'est-ce qu'un chronomètre ? Quelle définition idéale avons-nous en vue lorsque nous disons que tel chronomètre est meilleur qu'un autre ?

Pour nous en rendre compte, considérons une horloge rudimentaire : un sablier ; nous estimons que le sable met un temps toujours le même pour s'écouler d'un réservoir à l'autre : pourquoi ? Parce que nous ne voyons aucune différence dans la situation du sablier chaque fois que nous le renversons, le même phénomène va se passer : nous affirmons qu'il va durer le même temps.

Supposons qu'on ait un œuf mollet en le laissant dans l'eau bouillante pendant que le sable s'écoule d'un réservoir à l'autre. On recommence l'opération avec un œuf semblable : nous serions bien étonnés si on obtenait un œuf dur. Nous nous demanderions si le premier œuf n'était pas plus gros que le second, si l'écoulement du sable a été bien régulier, que sais-je ? Mais si aucune des explications que nous pourrions imaginer ne se montrait suffisante, nous n'aurions aucune raison de décider s'il vaut mieux mesurer la durée par le temps qu'il faut pour cuire un œuf mollet ou par celui qui est nécessaire pour que le sable s'écoule d'un réservoir à l'autre. Nous prétendrons toujours que, s'il y a une différence dans les résultats des mesures par l'un et l'autre procédé, c'est qu'une circonstance a changé dans la reproduction des phénomènes que nous croyions identiques.

Mais est-il possible de réaliser deux fois le même phénomène ? Strictement, non. Si on a renversé une première fois un sablier, on n'aura jamais plus un sablier qui n'a jamais été renversé. Il n'est **[p. 13]** naturellement pas difficile de faire abstraction de différences de cette nature. Mais, même parmi les différences physiques, on pourra faire abstraction de certains facteurs dont un dispositif convenable pourra compenser l'action. On jugera généralement que l'indication d'une bonne horloge doit être indépendante des circonstances de température, de champ électrique ou gravifique etc. Mais on ne peut faire abstraction de tout ; il faut bien admettre qu'il y a une réalité physique qui est la même entre le commencement et la fin des diverses secondes de tous les chronomètres.

Pour pouvoir étudier la réalité physique que mesurent les chronomètres nous devons adopter un mode de repérage des divers événements.

Nous ferons correspondre à chaque événement quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4, ses coordonnées. Le mode de repérage est complètement indifférent. Il faut pourtant que deux événements ne soient pas désignés par les mêmes coordonnées et que des événements voisins soient représentés par des nombres voisins.

L'égalité de deux intervalles de temps, nous apprend qu'une certaine grandeur caractérisée par les deux couples d'événements est égale pour chacun d'eux. Cette grandeur dépend pour chaque couple des coordonnées des événements. Pour des intervalles de temps infiniment petits, c'est une fonction des coordonnées et des différentielles de ces coordonnées.

Cette fonction doit être homogène par rapport aux différentielles. De plus, elle doit pouvoir être employée quel que soit le mode de repérage des événements, elle doit donc garder sa forme algébrique lorsqu'on fait un changement arbitraire de coordonnées.

L'intervalle de temps peut servir à repérer les divers événements ; il doit donc être du même ordre de grandeur que les différentielles des coordonnées.

Les formes les plus simples que l'on peut employer sont, des formes **[p. 14]** linéaires ou quadratiques des différentielles des coordonnées. On posera alors

$$ds = \sum_\sigma a_\sigma dx_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

ou

$$ds^2 = \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

avec

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \tag{2}$$

Remarquons que la première forme est un cas particulier de la seconde, celui où la forme quadratique est un carré parfait.

Le temps mesuré par un chronomètre est, en tout cas, égal à l'intégrale

$$\int ds$$

calculée en suivant le chronomètre ou, comme on dit, sur sa ligne d'univers, en appelant univers le continu à quatre dimensions des phénomènes physiques.

L'observation des chronomètres, nous fait donc atteindre des fonctions $g_{\mu\nu}$ des coordonnées, les potentiels d'univers, analogues à quatre variables des potentiels métriques de la géométrie.

Les potentiels métriques suffisent à déterminer dans l'espace les droites (ou à deux dimensions les géodésiques des surfaces). Ces lignes sont complètement définies par leurs conditions initiales : un point et la direction en ce point.

Il existe dans l'univers un fait analogue. Il y a des lignes d'univers qui sont complètement déterminées par les coordonnées d'un de leurs points et les différentielles de ces coordonnées. Ce sont les trajectoires que suivent des points matériels abandonnés à eux-mêmes. Il y a une propriété du milieu qui les oblige à suivre un chemin déterminé ; cette propriété s'appelle, suivant les circonstances, l'inertie ou le champ de gravitation. Ces réalités physiques qui tracent l'orbite des planètes ne seraient-elles pas les mêmes que celles qui déterminent le mouvement des horloges ? Celles-ci sont généralement basées sur la reproduction de phénomènes mécaniques **[p. 15]**. La réalité qu'elles mesurent est donc bien de même nature que celle qui se manifeste dans la dynamique des points libres.

La forme (I) définit généralement des lignes d'univers particulières qui sont déterminées par deux de leurs points. Il suffit d'appliquer les formules du calcul des variations à l'équation

$$\delta \int ds = 0$$

prise entre ces deux points. La trajectoire d'un point libre se calculera ainsi comme les droites de la géométrie générale ou les géodésiques d'une surface.

Mais pour que ce procédé soit applicable il est nécessaire que ce ne soit pas une différentielle exacte. Si la droite ou la géodésique peut être définie comme étant le plus court chemin entre deux points, c'est parce que la longueur d'un arc de courbe dépend de la forme de la courbe et n'est pas la même pour tous les arcs qui ont mêmes extrémités.

Pour que les potentiels $g_{\mu\nu}$ définissent la trajectoire des points libres, il faut donc que l'intervalle de temps entre deux événements dépende de la ligne d'univers suivant laquelle on passe d'un événement à l'autre. En d'autres termes, il faut renoncer à l'idée familière d'un temps absolu. Des chronomètres identiques et identiquement réglés ne marqueront généralement plus le même temps entre deux rencontres. Leur indication dépendra des lignes d'univers qu'ils ont suivies de l'une à l'autre. Il suffit d'ailleurs que le temps défini sur les diverses lignes d'univers diffèrent l'un de l'autre de quantités extrêmement petites. Il faut simplement que le temps ne soit pas rigoureusement une différentielle exacte ; il pourra alors être plus grand ou plus petit, sur une trajectoire, que sur toutes les trajectoires voisines de mêmes extrémités ; il y aura des géodésiques d'univers, les trajectoires des points matériels abandonnés à eux-mêmes.

[p. 16] Voici, par exemple, comment ces conditions peuvent être réalisées.

Lorsqu'on emploie des coordonnées cartésiennes x, y, z et un temps t défini d'une manière convenable, les équations du mouvement d'un point libre sous l'influence des seules forces de gravitation peuvent s'écrire, d'après la mécanique classique

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} + \frac{dV}{dx} &= 0 \\ \frac{dv_y}{dt} + \frac{dV}{dy} &= 0 \\ \frac{dv_z}{dt} + \frac{dV}{dz} &= 0 \end{aligned}$$

où v_x, v_y, v_z désignent les composantes de la vitesse du mobile, et V le potentiel du champ de gravitation.

Ces équations peuvent se mettre sous la forme d'Hamilton

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{v^2}{2} - V \right) dt = 0 \tag{3}$$

Soit c un nombre très grand par rapport aux vitesses qui se présentent dans les expériences en lesquelles ces équations sont basées, ce sera, par exemple, la vitesse de la lumière.

Considérons la forme quadratique

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + (c^2 + 2V)dt^2 \tag{4}$$

Nous aurons alors

$$\begin{aligned}\int ds &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + c^2 + 2V} \cdot dt \\ &= c\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(v^2 - 2V)} \cdot dt\end{aligned}$$

Puisque c^2 est grand par rapport à v^2 et par conséquent aussi par rapport à V qui est du même ordre de grandeur, nous pourrons écrire, très approximativement

$$\int ds = c\int_{t_0}^{t_1} \left[1 - \frac{1}{c^2}(\frac{v^2}{2} - V)\right] dt \tag{5}$$

L'équation des géodésiques

$$\delta \int ds = 0$$

sera alors équivalente à l'équation classique (3).

[p. 17] On pourrait naturellement obtenir le même résultat en se servant d'autres formes que (4) ; en particulier, en y prenant tous les termes positifs. Nous verrons plus tard les raisons qui ont conduit à ce choix des signes.

* * *

Voyons maintenant les conséquences qu'entraine l'équation (5), le temps des chronomètres ne sera plus une différentielle exacte, il y aura de petits écarts dans les mesures de l'intervalle de temps entre les événements suivant la trajectoire des horloges qui le mesurent.

Le terme principal de (5) est

$$c\int_{t_0}^{t_1} dt$$

C'est à un facteur près le temps employé par la mécanique classique.

Le temps en secondes sera donc

$$\frac{1}{c}\int ds = \int_{t_0}^{t_1}\left[1-\frac{1}{c^2}(\frac{v^2}{2}-V)\right]dt$$

Une montre immobile en un point où le potentiel est nul

$$v=0 \quad V=0$$

marque le temps coordonnée

$$T_1=\int_{t_0}^{t_1} dt = t_1-t_0$$

Une deuxième montre en mouvement sur une surface équipotentielle

$$V=0$$

marque le temps

$$T_2=\int_{t_0}^{t_1}\left(1-\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{2}\right)dt=\left(1-\frac{1}{c^2}\frac{\overline{v^2}}{2}\right)T_1$$

où $\overline{v^2}$ est le carré moyen de la vitesse.

$$\overline{v^2}=\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1} v^2 dt$$

Considérons enfin une troisième montre, identique aux deux précédentes, lancée verticalement au temps t_0 avec une vitesse v_0 et retombant auprès des deux autres à l'instant t_1.

Puisque l'équation (5) n'est qu'une équation approchée nous pouvons nous contenter de calculer la vitesse et le potentiel suivant [p. 18] la trajectoire en adoptant les équations classiques

$$x=v_0t-\frac{gt^2}{2}$$

et

$$V=gx$$

Nous aurons alors

$$T_1 = t_1 - t_0 = \frac{2v_0}{g}$$

et le temps marqué par la troisième montre sera

$$T_3 = \int_{t_0}^{t_1} \{1 + \frac{1}{c^2} \left[g \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2} \right) - \frac{1}{2}(v_0 - gt)^2 \right] \} \, dt$$

En effectuant l'intégration, on trouve

$$T_3 = \left(1 + \frac{1}{6} \frac{v_0^2}{c^2} \right) T_1$$

La montre *T3* en mouvement libre marquera donc entre les mêmes événements (les rencontres des montres) un temps plus grand que chacune des deux autres.

Il est facile de voir que lorsqu'on adopte la forme (4) de l'élément de temps, la trajectoire d'un point libre est toujours une trajectoire de temps maximum. On peut toujours, en effet, imaginer une trajectoire virtuelle, aussi voisine que l'on veut de la trajectoire réelle, pour laquelle le temps est moindre. Il suffit de concevoir un mobile décrivant une spirale serrée autour de la trajectoire réelle. Le potentiel *V* aurait alors même valeur sur les deux trajectoires ; la vitesse *v* sera plus grande sur la trajectoire virtuelle et, par conséquent, le temps (5) sera moindre sur cette dernière.

Il ne faudrait pourtant pas conclure que le temps sur la trajectoire d'un mobile soit nécessairement un maximum absolu. C'est seulement un maximum relativement aux trajectoires voisines. Ainsi la deuxième montre dont nous venons de parler pourrait, sans quitter la surface de niveau, revenir à son point de départ en décrivant un grand cercle autour de la terre, avec une vitesse (7,9 Km.sec) telle que la force centrifuge neutralise exactement la pesanteur. **[p. 19]** Elle décrirait donc une géodésique, une trajectoire de point libre. Son temps sera plus grand que celui de toutes les trajectoires virtuelles voisines de mêmes extrémités, et cependant il serait plus petit que le temps T'_1 marqué entre ces mêmes extrémités, par la montre immobile. La différence serait, dans ce cas, en prenant

$$c = 3.10^{10} \text{ cm. sec.}$$

de deux millionnièmes [sic] de secondes pour un trajet de 1 $^{\text{h}}$ 24 $^{\text{m}}$.

§ 3. La simultanéité et l'espace

[p. 20] Les définitions que nous avons données de la longueur d'une ligne et de la durée d'un phénomène se réduisent l'une et l'autre à la réalisation de phénomènes périodiques successifs ; points équidistants marqués sur la ligne, secondes identiques d'un chronomètre. Dans le cas de la mesure du temps cette périodicité est réalisée suivant la ligne d'univers suivie par le chronomètre. Sur quelle ligne d'univers est-elle réalisée dans le cas de la mesure des longueurs ?

Nous avons supposé jusqu'ici que l'objet à mesurer ne se déformait pas ; nous avions alors tout le temps de marquer des points équidistants et de vérifier l'égalité de leurs intervalles. Mais si nous voulons étudier la longueur d'un objet qui se déforme, il faut que nous réalisions toutes les opérations que comporte la mesure, au même instant. Si nous nous trompons dans l'appréciation de la simultanéité, notre mesure sera faussée. La périodicité des longueurs doit être réalisée sur une ligne de points simultanés.

Lorsque nous marquons deux points sur un objet, chacun de ces points décrit une ligne d'univers. Représentons par

$$dx_1 \;\; dx_2 \;\; dx_3 \;\; dx_4$$

les différences des coordonnées des deux points et par

$$\delta x_1 \;\; \delta x_2 \;\; \delta x_3 \;\; \delta x_4$$

les variations des coordonnées suivant les lignes d'univers voisines que décrivent les deux points. La condition de simultanéité ne peut dépendre que des coordonnées x_σ ($\sigma = 1, 2, 3, 4$) et des deux sortes de variations dx_σ et δx_σ. Cette condition doit être symétrique par rapport aux deux points, elle ne doit pas changer quand on en invertit l'ordre, c'est-à-dire quand on change le signe de tous les dx_σ. En effet, la notion de simultanéité, tout comme la notion de distance, est réciproque ; elle est indépendante de l'ordre dans lequel on **[p. 21]** considère les points.

La solution du problème de la simultanéité est analogue à celle du problème géométrique des directions perpendiculaires.

Considérons la forme bilinéaire associée à la forme quadratique ds^2

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu} g_{\mu\nu} dx_{\mu} \delta x_{\nu}.$$

C'est une fonction invariante des coordonnées et des deux sortes de variations. Pour qu'elle soit symétrique par rapport aux deux événements simultanés, il faut que sa valeur ne change pas, quand on change le signe des dx_μ ; elle doit donc s'annuler.

La condition de simultanéité

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu} g_{\mu\nu} dx_{\mu} \delta x_{\nu} = 0 \tag{1}$$

doit donc être réalisée entre les points d'un objet dont on mesure la longueur. On peut utiliser cette relation pour éliminer de l'expression

$$ds^2 = \sum_{\mu}\sum_{\nu} g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} \tag{2}$$

une des coordonnées dx_μ, on obtiendra alors une forme quadratique

$$ds^2 = \sum_{\mu}^{3}\sum_{\nu}^{3} \gamma_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} \tag{3}$$

à trois variables, où les $\gamma_{\mu\nu}$ sont des fonctions des potentiels d'univers $g_{\mu\nu}$ et de la vitesse δx_ν de l'objet. Cette expression doit être égale pour deux couples de points équidistants. En effet, superposer deux longueurs revient à effectuer un changement de coordonnées de telle sorte que les coordonnées des points ainsi que les diverses grandeurs qui caractérisent une des longueurs, se transforment dans les coordonnées et les grandeurs correspondantes de l'autre longueur. C'est alors seulement que nous pourrons dire qu'elles sont identiques, elles ne diffèrent que par le choix des coordonnées de repérage. Mais la forme bilinéaire de l'équation de simultanéité et l'expression de *ds* sont des expressions invariantes, indépendantes du choix des coordonnées. Leurs valeurs doivent donc être les mêmes pour deux couples de points équidistants. *ds* est donc l'élément de distance. Lorsque la forme quadratique est négative on la posera égale à $-d\sigma^2$, $d\sigma$ représentera alors l'élément **[p. 22]** de distance.

Nous obtenons ainsi la géométrie sous la forme générale de Riemann (§ 1-1). La longueur d'un arc se calculera par la formule (§ 1-2).

Les potentiels métriques sont des fonctions des potentiels d'univers $g_{\mu\nu}$ et de la vitesse δx_σ des divers points des objets que l'on mesure.

Considérons par exemple la forme que nous avons obtenue au § précédent

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + (c^2 + 2V)dt^2$$

l'équation de simultanéité de points immobiles

$$\delta x = \delta y = \delta z = 0$$

sera

$$(c^2 + 2V)\delta t dt = 0$$

ou

$$dt = 0$$

La géométrie de ces points sera donc caractérisée par

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

qui définit l'élément de distance de la géométrie euclidienne.

Si nous réglons des horloges immobiles par simultanéité –c'est-à-dire, dans le cas actuel, si nous leur faisons marquer le temps t– ces horloges ne pourront généralement plus être considérées comme identiques et ne seront plus interchangeables. Des horloges identiques immobiles marqueraient, en effet, le temps

$$\frac{1}{c}\int \sqrt{c^2 + 2V}.dt.$$

La définition de la simultanéité sur un corps dépend non seulement de la vitesse δx_σ du corps, mais elle peut aussi dépendre **[p. 23]** de la ligne suivant laquelle on la définit de proche en proche. Nous rencontrerons plus tard un exemple de ce cas.

* * *

Ces diverses complications de notre notion habituelle du temps disparaissent à la limite dans un domaine infiniment petit.

En géométrie générale on peut toujours trouver un domaine assez petit pour que les relations de la géométrie d'Euclide y soient valables avec une approximation donnée. On peut de même dans la mécanique d'Einstein adopter approximativement au voisinage d'un point une forme réduite du ds^2 analogue à l'élément de distance de la géométrie d'Euclide.

Dans un domaine petit, on peut remplacer les potentiels $g_{\mu\nu}$ par leurs valeurs en un point M. ds^2 est alors une forme quadratique à coefficients constants. Elle se réduit par un changement linéaire des coordonnées, à une somme algébrique de carrés.

On évitera généralement les coordonnées imaginaires en choisissant les signes de la manière suivante :

$$ds^2 = -d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2 + d\xi_4^2$$

Cette réduction est possible de plusieurs manières.

Si

$$\delta x_1 \;\; \delta x_2 \;\; \delta x_3 \;\; \delta x_4$$

représente la vitesse d'un point d'un corps, on pourra imposer aux fonctions

$$\xi_\sigma = \xi_\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$(\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

par lesquelles s'effectue la réduction, la condition suivante

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial x_\nu} = K \sum_\nu g_{\mu\nu} \delta x_\nu \tag{4}$$

[p. 24] Cette relation ne doit d'ailleurs être vérifiée exactement qu'en M (K est une constante quelconque)

L'équation de simultanéité (1) sera alors sur le corps

$$\sum_\mu \frac{\partial \xi_4}{\partial x_\mu} dx_\mu = d\xi_4 = 0.$$

Les longueurs sur le corps ne dépendent pas de ξ_4, la géométrie y est définie par l'élément de distance

$$d\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont des coordonnées cartésiennes.

L'équation de simultanéité s'écrit dans le nouveau système de coordonnées

$$-d\xi_1\delta\xi_1 - d\xi_2\delta\xi_2 - d\xi_3\delta\xi_3 + d\xi_4\delta\xi_4 = 0$$

Pour que cette équation se réduise à

$$d\xi_4 = 0$$

il faut que

$$\delta\xi_1 = \delta\xi_2 = \delta\xi_3 = 0$$

les variations $\delta\xi_\sigma$ étant prises suivant les lignes d'univers des points du corps. C'est suivant ces lignes d'univers que se calcule le temps sur le corps, ce sera

$$\int d\xi_4$$

Les nouvelles coordonnées donnent donc immédiatement le résultat des mesures spatio-temporelles effectuées en un point d'un corps. C'est ce que nous appellerons les *coordonnées propres* du corps en ce point. Nous emploierons généralement les notations

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2$$

où c est une constante ; x, y, z sont des coordonnées cartésiennes, t le temps de chronomètres immobiles.

Lorsque cette forme du ds peut être adoptée rigoureusement, nous dirons que nous avons affaire à un champ de Galilée.

Ce sont ces champs qu'Einstein a d'abord étudiés dans son mémoire **[p. 25]** de 1905 sur l'électrodynamique des corps en mouvement. Il est arrivé à la forme définitive de sa théorie (1915) en adoptant le procédé par lequel Riemann avait généralisé la géométrie d'Euclide, c'est-à-dire en admettant que la forme primitive de sa théorie n'était valable qu'à la limite dans un domaine infiniment petit. C'est le mode habituel de généralisation usité en physique.

§ 4. Les mesures indirectes d'espace et de temps

[p. 26] Nous avons vu comment se mesurent les dimensions d'un corps par arpentage au moyen de mètres identiques portés bout à bout sur ce corps. Le résultat des mesures dépend du mouvement du corps. Celui-ci peut se déformer au cours du mouvement. Nous supposons seulement que la vitesse de ses points varie d'une façon continue d'un point à l'autre. Les dimensions du corps sont alors parfaitement déterminées lorsqu'on connaît les équations des lignes d'univers suivies par chacun de ses points.

Le résultat des mesures ne dépend pas du système de coordonnées adopté, ce sont des mesures absolues.

Il est souvent impossible de procéder par mesure directe en portant les instruments de mesure sur l'objet qu'on se propose de mesurer. Il faut alors déduire les longueurs de mesures indirectes effectuées au moyen des appareils dont on dispose.

Si nous voulons mesurer la longueur d'un obus à sa sortie du canon, nous ne disposons pas d'un mètre qui l'accompagne dans son mouvement. Mais nous pourrons par exemple le photographier. Il faudra alors déduire des dimensions de l'épreuve les résultats que nous obtiendrions si nous pouvions suivre l'obus dans son mouvement et le mesurer à la manière ordinaire.

Quel que soit le procédé employé, on pourra le ramener à celui-ci. Nous marquerons au même instant sur un corps qui porte nos instruments, les points qui coïncident avec ceux du mobile. Nous obtiendrons ainsi une image accessible du mobile.

Nous devrons déduire des dimensions de l'image, les dimensions de l'objet.

[p. 27] Nous marquons les points au même instant par rapport à nos instruments de mesure ; c'est la seule simultanéité que nous pouvons songer à réaliser.

Représentons par ξ, η, ζ, τ les coordonnées propres du corps qui porte les instruments à l'endroit où se fait la mesure ; les points simultanés seront ceux pour lesquels les valeurs de τ seront égales.

Désignons par x, y, z, t les coordonnées propres de l'objet au même point. On doit avoir

(1) $$ds^2 = -d\xi^2 - d\eta^2 - d\zeta^2 + c^2 d\tau^2$$

et

(2) $$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

Pour un choix convenable de l'orientation des deux systèmes d'axes, on pourra poser

(3) $$\begin{cases} d\xi &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(dx + \nu dt) \\ d\eta &= dy \\ d\zeta &= dz \\ d\tau &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{v}{c^2}dx + dt\right) \end{cases}$$

Cette transformation est compatible, quel que soit v avec les équations (1) et (2).

La vitesse de l'objet s'obtient en y posant

$$dx = dy = dz = 0$$

On trouve

$$\frac{d\xi}{d\tau} = v, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = 0$$

Les équations (3) portent le nom de transformations de Lorentz. Elles peuvent aussi s'écrire

$$\begin{cases} dx &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(d\xi - \nu d\tau) \\ dy &= d\eta \\ dz &= d\zeta \\ dt &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(-\frac{v}{c^2}d\xi + d\tau\right) \end{cases}$$

[p. 28] En procédant par mesures indirectes, nous obtenons des différences de coordonnées

$$d\xi, d\eta, d\zeta$$

entre des points liés par la condition de simultanéité.

$$d\tau = 0$$

Les vraies longueurs

$$dx, dy, dz$$

sont donc

$$\begin{cases} dx &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} d\xi \\ dy &= d\eta \\ dz &= d\zeta \end{cases}$$

Les dimensions de l'image sont différentes de celles de l'objet. Le procédé par mesure indirecte ne donne pas immédiatement les dimensions de l'objet. Les dimensions normales à la vitesse sont conservées mais les mesures effectuées dans la direction de cette vitesse doivent être corrigées. L'objet paraît contracté dans le sens de son mouvement. Ses longueurs parallèles à la vitesse paraissent réduites dans le rapport

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

On peut aussi procéder par mesures indirectes à la mesure du temps.

On se propose de mesurer l'intervalle de temps dt entre deux événements qui se produisent en un point d'un mobile. Il est impossible de le mesurer directement au moyen d'un chronomètre qui accompagnerait ce mobile. Mais on dispose de chronomètres placés sur un corps accessible et réglés par simultanéité.

On note la différence $d\tau$ des indications des deux chronomètres devant lesquels se produisent les deux événements.

Il s'agit de déduire de la mesure indirecte $d\tau$ le temps dt que mesurerait un chronomètre accompagnant le mobile.

[p. 29] Puisque les événements ont lieu au même point que l'objet, on doit poser

$$dx = 0$$

dans les équations de Lorentz, on trouve donc

$$d\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, dt$$

On peut interpréter cette correction à apporter aux mesures indirectes en disant que les phénomènes qui se passent sur le mobile paraissent retardés dans le rapport :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nous avons vu comment des grandeurs absolues, durée d'un phénomène et longueur d'un corps peuvent être déterminées par des mesures indirectes relatives à un autre corps. Nous allons aborder maintenant l'étude d'une grandeur qui est essentiellement relative : la vitesse.

Nous avons parlé à plusieurs reprises de la vitesse d'un point, elle est caractérisée par les différentielles

$$dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$$

des coordonnées. Elle dépend essentiellement du mode de repérage.

Lorsqu'on emploie des appareils de mesures situés sur un corps, on entendra par vitesse d'un mobile par rapport à ce corps les différentielles

$$dx, dy, dz, dt$$

des coordonnées propres du corps au point où se trouve le mobile. On appellera

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

les composantes de la vitesse, et

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

la grandeur de la vitesse.

[p. 30] On considère parfois, sous le nom de vitesse propre, la vitesse dont les composantes sont

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$$

La transformation de Lorentz permet de calculer les composantes

$$\frac{d\xi}{d\tau}, \frac{d\eta}{d\tau}, \frac{d\zeta}{d\tau}$$

de la vitesse d'un point, par rapport à un corps de coordonnées propres ξ, η, ζ, τ, lorsqu'on connaît la vitesse du même point par rapport à un autre corps de coordonnées propres x, y, z, t, animé par rapport au premier d'une vitesse v suivant l'axe des ξ_2.

On trouve immédiatement

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = \dfrac{\frac{dx}{dt} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} \\[2ex] \dfrac{d\eta}{d\tau} = \dfrac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} \dfrac{dy}{dt} \\[2ex] \dfrac{d\zeta}{d\tau} = \dfrac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

Ces formules donnent en première approximation (lorsqu'on néglige les termes contenant $1/c^2$) les formules ordinaires de composition des vitesses. Ces formules classiques restent appliquables [sic] lorsque les vitesses que l'on combine sont suffisamment petites.

Si celles-ci sont très grandes, la différence entre les équations nouvelles et les anciennes pourra devenir accessible à l'expérience.

Certains phénomènes résultent de la différence des composantes de la vitesse de la lumière suivant le mouvement du corps par rapport auquel on la mesure.

Supposons que les composantes de la vitesse mesurée soient de l'ordre de grandeur de c, la vitesse relative v des systèmes de comparaison étant petite par rapport à c. La première des **[p. 31]** équations précédentes s'écrit approximativement

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{dx}{dt} + v\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]$$

ou, en posant

$$\frac{c}{\frac{dx}{dt}} = n ,$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} - \frac{dx}{dt} = v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

C'est la formule trouvée par Fizeau et vérifiée expérimentalement avec une grande précision. Fizeau a fait interférer des rayons lumineux d'une même source se propageant dans un courant d'eau de vitesse v, l'un dans le sens du courant, l'autre dans le sens contraire. Le déplacement des franges d'interférence lorsqu'on change le sens du courant résulte d'une vitesse d'entrainement

$$v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

au lieu de v comme on devrait avoir d'après la loi classique de composition des vitesses. n est l'indice de réfraction du milieu, c'est-à-dire le rapport de la vitesse dans le vide et de la vitesse dans le milieu.

La nouvelle loi de composition des vitesses rend immédiatement compte de l'expérience de Fizeau si on admet que c est la vitesse de la lumière dans le vide. En suivant un rayon lumineux, on aura donc

$$ds = 0$$

Il en résulte que la grandeur de la vitesse de la lumière est constante en un point, quels que soient la direction du rayon et le mouvement du système par rapport auquel on la mesure.

Mr. Michelson a essayé vainement de mettre en évidence une différence de vitesse de rayons lumineux se propageant dans des directions différentes ; il pensait ainsi pouvoir déceler le mouvement de la terre par rapport au milieu transmetteur de la lumière. Le résultat négatif de son expérience a joué un grand rôle dans l'établissement [p. 32] et la diffusion des théories d'Einstein.

Le fait que la vitesse de la lumière est indépendante de la direction du rayon lumineux donne un moyen commode de réaliser la simultanéité des chronomètres. Deux rayons qui se croisent dans deux directions opposées doivent être considérés comme symétriques l'un de l'autre.

Considérons deux rayons lumineux se propageant dans les deux sens sur la droite joignant deux points A et B. Le premier signal partira de A au moment où un chronomètre placé en A marque le temps t'_A, passe devant des chronomètres intermédiaires qui marquent le temps t' et parvient en B lorsque le chronomètre de B marque t'_B. Le signal envoyé de B en t''_B passe devant les chronomètres intermédiaires lorsqu'ils marquent t'' et parvient en A en t''_A.

Les indications

$$\frac{t'_A + t''_A}{2}, \quad \frac{t' + t''}{2}, \quad \frac{t'_B + t''_B}{2}$$

des chronomètres respectifs sont simultanées.

Cela résulte simplement de ce que la vitesse de la lumière est la même dans les deux sens. La vitesse peut varier d'un point à l'autre, il faut seulement qu'elle reste la même en chaque point pendant le temps qui sépare le passage des deux signaux en ce point.

Ce procédé peut être employé sur une ligne polygonale quelconque ; il suffit de disposer des miroirs qui réfléchissent les rayons lumineux suivant les côtés du polygone. On peut ainsi comparer expérimentalement la réalisation de la simultanéité entre deux points suivant des trajets différents.

Si, par exemple, le polygone que suivent les signaux est fermé, [p. 33] les montres de A et B sont au même endroit, leur simultanéité réalisée directement revient à leur équivalence, elles marquent la même heure lorsqu'un événement a lieu près d'elles. On peut d'ailleurs n'employer qu'une seule montre.

Lorsqu'on définit la simultanéité suivant le polygone, on doit considérer comme simultanées l'indication

$$\frac{t'_A + t''_A}{2}$$

du chronomètre supposé en A, et l'indication

$$\frac{t'_B + t''_B}{2}$$

du même chronomètre considéré comme étant en B.

Si les deux signaux partent au même moment

$$t'_A = t''_B$$

la différence des instants de leur retour

$$t'_B - t''_A$$

sera égale au double de l'écart Δt résultant de la définition de la simultanéité suivant le polygone.

On pourra réaliser l'expérience en divisant un rayon lumineux en deux rayons qui décrivent en sens opposés un même polygone et se réunissent à nouveau. Le retard d'un rayon sur l'autre se déterminera par des mesures d'interférence.

Cette expérience a été réalisée par Mr. Sagnac dans le cas d'un champ centrifuge dont l'équation en coordonnées polaires (r étant la distance à l'axe de rotation) peut s'écrire (§ 3-1)

$$ds^2 = -dr^2 - r^2(d\theta - \omega dt)^2 - dz^2 + c^2dt^2$$

l'équation de simultanéité pour un corps immobile

$$\delta r = \delta\theta = \delta z = 0$$

est

$$r^2(d\theta - \omega dt)\omega\delta t + c^2 dt\delta t = 0$$

ou

$$\omega r^2 d\theta + (c^2 - \omega^2 r^2)dt = 0.$$

La variation du temps t sur un contour fermé de points simultanés est

$$\Delta t = -\frac{\omega}{c^2}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\theta}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \cong -\frac{2\omega S}{c^2}$$

où

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\theta}{2}$$

[p. 34] représente l'aire de la projection du polygone sur le plan normal à l'axe de rotation.

Le retard des rayons doit donc être égal à

$$2\Delta t = \frac{4\omega S}{c^2}$$

C'est ce qui a été vérifié expérimentalement.

Chapitre II : Les champs de force

La loi de l'attraction universelle et la notion de forces réciproques exercées d'un corps sur l'autre suggèrent l'idée que la force est une réalité ayant son siège dans l'une et l'autre masse ; il ne semble pas qu'il lui corresponde quelque chose en dehors des masses. Le rôle du milieu y est réduit au minimum. Il apparaît pourtant en ceci : la force est en raison inverse du carré de la distance des corps ; elle dépend de la quantité d'espace qui les sépare.

Cette conception d'action à distance avait bien causé quelqu'inquiétude à Newton ; tout se passe comme si les corps s'attirent, disait-il ; mais dans l'enthousiasme que provoquaient avec raison les succès de la théorie, ses successeurs perdirent de vue les prudentes réserves du début et l'explication des divers phénomènes physiques fut cherchée dans des actions à distance.

Le rôle du milieu ne tarda pas à s'imposer de nouveau. Pour Newton, la lumière était une émission rapide de particules matérielles. Cette conception qui devait trouver plus tard son application dans la théorie des rayons cathodiques, se montra tout à fait insuffisante pour rendre compte des lois de l'optique. Il fallut faire appel à un milieu transmetteur, l'éther. On le dota naturellement, suivant les idées de l'époque, de propriétés mécaniques ; il devait être plus rigide que l'acier et plus léger que l'air ; c'était un peu étrange ; mais enfin, cela entrait dans le schéma général des corps solides, dont les propriétés s'interprétaient **[p. 35]** par des actions, fonctions de la distance.

Le rôle du milieu dans la transmission des forces s'affirma plus nettement en électricité.

L'action réciproque des masses s'exprime par une loi tout à fait analogue à celle de l'attraction universelle la loi de Coulomb. Des masses électriques de même nature se repoussent en raison directe du produit des masses et en raison inverse du carré des distances. Mais la répulsion ne dépend plus seulement de la quantité d'espace qui séparent les masses, elle dépend en outre de la nature du milieu qui les sépare. La force varie lorsqu'on intercale entre elles une lame de verre par exemple. L'attention se détourna ainsi petit à petit des conducteurs portant les masses électriques et se porta d'avantage sur les phénomènes qui se passent dans les diélectriques.

La théorie se développant, il apparut bientôt que les champs induits par des courants doivent se propager avec une vitesse finie, égale au rapport des grandeurs électriques mesurées dans les deux systèmes d'unités électrostatiques et électromagnétiques. Les courants n'agissent pas l'un sur l'autre instantanément ; il y a un retard entre la cause et l'effet ; il faut donc bien que l'action se transmette entre les corps dans le milieu qui les sépare.

La vitesse de cette transmission, rapport des unités des deux systèmes est justement égale à la vitesse de la lumière. Il y a donc une relation entre ces phénomènes si dissemblables. Maxwell montra que la propagation d'une onde d'induction à toutes les propriétés de la lumière. Ces ondes ont été réalisées par Hertz qui a ainsi confirmé d'une manière définitive la théorie de Maxwell. On sait l'importance pratique inatendue [sic] qu'ont trouvé ces études théoriques dans la télégraphie sans fil.

Ces résultats nous imposent une nouvelle conception des actions réciproques des corps. Ils n'agissent pas directement l'un sur l'autre **[p. 36]** mais ils sont dans un milieu qu'ils modifient et dont ils subissent l'action ; nous pouvons étudier l'état du milieu en observant le mouvement qu'il impose à des particules neutres ou électrisées ou encore à des aiguilles aimantées. Nous explorons ainsi les champs d'inertie et de gravitation ou les champs électriques et magnétiques.

Un second problème consiste à étudier la réaction que la matière excerce sur le champ. Une théorie complète devra synthétiser ces deux points de vue ; elle rendra compte de la production des champs par les masses et de l'exploration de ces champs par l'observation du mouvement de petits corps d'épreuve.

Nous allons étudier, dans ce chapitre, le premier problème : l'exploration des champs au moyen de corps d'épreuve et la définition des grandeurs qui caractérisent l'état du milieu. Nous verrons, dans les chapitres suivantes, les divers modes de production des champs, par mouvement relatif (champ de force centrifuge) par exemple, ou par la présence de masses matérielles et électriques. Nous aboutirons enfin aux lois générales qui interprètent les deux ordres de phénomènes, l'action et la réaction des champs sur les masses.

Les champs se divisent immédiatement en deux grandes classes : ceux qui agissent de la même manière sur une particule quelle que soit sa nature, sa charge électrique etc, et ceux dont l'action dépend de l'état électrique du corps d'épreuve. Nous considérerons d'abord les champs de la première classe, champ d'inertie et de gravitation ; nous en avons déjà dit quelques mots au chapitre précédent, § 2. Nous allons reprendre leur théorie et en développer les calculs.

§ 5. Le champ d'inertie et de gravitation

[p. 37] Nous avons vu que les propriétés spatio-temporelles du milieu peuvent être représentées par la forme fondamentale à quatre variables

$$ds^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{1}$$

Des lignes d'univers particulières, les géodésiques, définissent le mouvement libre de particules matérielles. Nous avons vu qu'il était possible de choisir la forme (1) de telle sorte que les équations des points libres diffèrent très peu de celles que vérifie l'expérience. Nous allons maintenant calculer ces équations lorsque les potentiels sont des fonctions quelconques des coordonnées.

Le calcul est naturellement le même que celui par lequel on détermine les géodésiques d'une surface, ou les droites de la géométrie générale lorsqu'on connaît l'expression de l'élément de distance pour un système de coordonnées.

Nous avons à comparer la valeur de

$$\int ds$$

sur la trajectoire réelle d'un point libre et sur des trajectoires virtuelles de mêmes extrémités. Pour calculer les intégrales curvilignes nous prendrons comme variable la valeur λ, que prend en chaque point une fonction convenable des coordonnées.

Les intégrales curvilignes se transforment alors en des intégrales définies de mêmes limites.

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F d\lambda \tag{2}$$

où

$$F = \sqrt{\sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda}} \tag{3}$$

Les dérivées, que nous représentons par

$$u^\sigma = \frac{dx_\sigma}{d\lambda} \qquad (\sigma = 1,2,3,4) \tag{4}$$

doivent être calculées sur les trajectoires respectives.

[p. 38] Soient

$$x_\sigma = x_\sigma(\lambda) \qquad (\sigma = 1,2,3,4)$$

les équations de la trajectoire réelle.

Les équations

$$x_\sigma = x_\sigma(\lambda) + \alpha\varpi_\sigma(\lambda) \qquad (\sigma = 1,2,3,4)$$

représenteront des trajectoires virtuelles, si les fonctions continues $\varpi_\sigma(\lambda)$ s'annulent aux limites.

Lorsque α tend vers zéro, les trajectoires virtuelles deviennent aussi voisines que l'on veut de la trajectoire réelle. Pour que celle-ci soit une géodésique, il faut que la différence de l'intégrale (2) sur la trajectoire réelle et sur la trajectoire virtuelle, ne dépende pas du signe de α lorsque α tend vers zéro.

Cette différence peut s'écrire

$$\int \left[F(x_\sigma, u^\sigma) - F(x_\sigma + \alpha\varpi_\sigma, w^\sigma + \alpha\frac{d\varpi_\sigma}{d\lambda})\right] d\lambda$$

dont le terme principal, lorsque α tend vers zéro, est

$$\alpha \int \sum_\sigma \left[\frac{\partial F}{\partial x_\sigma}\varpi_\sigma + \frac{\partial F}{\partial u^\sigma}\frac{d\varpi_\sigma}{d\lambda}\right] d\lambda.$$

Ce terme doit être nul.

Transformons le en intégrant par parties. On a

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial F}{\partial u^\sigma}\frac{d\varpi_\sigma}{d\lambda} d\lambda = \left[\frac{\partial F}{\partial u^\sigma}\varpi^\sigma\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varpi_\sigma \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial u^\sigma}\right) d\lambda.$$

Et puisque ϖ_σ s'annule aux limites

$$\int \sum_\sigma \left[\frac{\partial F}{\partial x_\sigma} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial u^\sigma}\right)\right] \varpi_\sigma d\lambda = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée quelles que soient les fonctions ϖ_σ continues et admettant une dérivée continue.

Il en résulte qu'en tout point de la trajectoire réelle doit avoir

$$\frac{\partial F}{\partial x_\sigma} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial u^\sigma}\right) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

Si le premier membre d'une de ces équations était différent de zéro en un point, on pourrait facilement trouver des valeurs de ϖ_σ pour lesquelles l'intégrale ne s'annulerait pas.

On pourrait en effet trouver, au voisinage de ce point, un intervalle

$$\ell < \lambda < L$$

où une des expressions entre crochets ne change pas de signe. On peut **[p. 39]** facilement trouver une valeur du ϖ_σ correspondant qui ne change pas de signe dans cet intervalle.

$$\varpi_\sigma = (\ell - \lambda)^2 (L - \lambda)^2$$

On peut alors annuler ϖ_σ en dehors de cet intervalle. ϖ_σ sera ainsi une fonction continue admettant une dérivée continue.

En annulant les autres ϖ_σ , la quantité sous le signe intégrale aurait partout même signe sans s'annuler partout et l'intégrale ne pourrait s'annuler.

* * *

Pour développer l'équation (5) il est commode de choisir la fonction λ de telle sorte que, sur la trajectoire réelle, on ait

$$d\lambda = ds$$

On pourra alors, après avoir calculé les dérivées partielles de

$$F = \sqrt{\sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}$$

remplacer la quantité sous le radical par sa valeur *1* sur la trajectoire réelle.

On a ainsi

$$\frac{\partial F}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} u^\mu u^\nu$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial u^\sigma} = \frac{1}{2} \left[\sum_\nu g_{\sigma\nu} u^\nu + \sum_\mu g_{\mu\sigma} u^\mu \right]$$

Les équations (5) des géodésiques sont alors

$$\frac{1}{2} \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[\sum_\nu g_{\sigma\nu} \frac{dx_\nu}{ds} + \sum_\mu g_{\mu\sigma} \frac{dx_\mu}{ds} \right] = 0$$

Effectuons alors la dérivation, en remarquant que

$$\frac{d}{ds} g_{\sigma\nu} = \sum_\mu \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{ds}$$

et

$$\frac{d}{ds} g_{\mu\sigma} = \sum_\nu \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Il vient

$$\frac{1}{2} \sum_\mu \sum_\nu \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} \right) \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}$$
$$- \frac{1}{2} \left(\sum_\nu g_{\sigma\nu} \frac{d^2 x_\nu}{ds^2} + \sum_\mu g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} \right) = 0$$

Les deux termes de la dernière parenthèse sont égaux par suite de la symétrie des $g_{\mu\nu}$ (§ 2-2)

$$g_{\sigma\nu} = g_{\nu\sigma}$$

[p. 40] En introduisant la notation suivante due à Christoffel

$$\text{(6)} \qquad \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)$$

Les équations des géodésiques s'écrivent

$$\text{(7)} \qquad \sum_\mu g_{\mu\sigma}\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \sum_\mu\sum_\nu \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0$$

Il est commode de résoudre ces quatre équations par rapport aux dérivées secondes. Cette résolution s'effectue aisément en introduisant des quantités $g^{\sigma\tau}$ définies par les équations

$$\text{(8)} \qquad \sum_\sigma g_{\mu\sigma} g^{\sigma\tau} = g_\mu^\tau \qquad\qquad (\mu, \tau = 1, 2, 3, 4)$$

où

$$g_\mu^\tau = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mu = \tau \\ 0 & \text{si} \quad \mu \neq \tau \end{cases}$$

Ces équations constituent pour chaque valeur de τ un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues $g^{1\tau}$, $g^{2\tau}$, $g^{3\tau}$, $g^{4\tau}$, qui permet de les calculer. Multiplions la première des équations des géodésiques ($\sigma = 1$) par $g^{1\tau}$ la seconde par $g^{2\tau}$ la troisième et la quatrième respectivement par $g^{3\tau}$ et $g^{4\tau}$ et sommons les expressions ainsi obtenues. Il vient

$$\sum_\sigma\sum_\mu g_{\mu\sigma} g^{\sigma\tau}\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \sum_\sigma\sum_\mu\sum_\nu g^{\sigma\tau} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0$$

Le premier terme s'écrit

$$\sum_\mu g_\mu^\tau \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = \frac{d^2 x_\tau}{ds^2}$$

le second se simplifie par l'introduction du symbole de Christoffel de deuxième espèce

$$\text{(9)} \qquad \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} = \sum_\sigma g^{\sigma\tau} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix}$$

Les équations des géodésiques s'écrivent finalement

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} + \sum_\mu \sum_\nu \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0 \qquad (\tau = 1, 2, 3, 4) \tag{10}$$

[p. 41] Ce sont les équations du mouvement de la nouvelle mécanique.

Remarques 1) Les quantités $g^{\sigma\tau}$ que nous avons introduites dans le calcul sont dites associées aux potentiels $g_{\sigma\tau}$. Il est facile de trouver leur expression en fonction de ces potentiels.

Les équations par lesquelles nous les avons définies se décomposent en quatre systèmes ($\tau = 1, 2, 3, 4$) de quatre équations à quatre inconnues

$$g_{\mu 1} g^{1\tau} + g_{\mu 2} g^{2\tau} + g_{\mu 3} g^{3\tau} + g_{\mu 4} g^{4\tau} = g_\mu^\tau$$
$$(\mu = 1, 2, 3, 4)$$

Le déterminant de chacun de ces systèmes est le déterminant

$$g = |g_{\mu\nu}|$$

formé au moyen des potentiels.

Calculons par exemple g^{23} dans le système ($\tau = 3$)

$$g^{23} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} g_{11} & , & 0 & , & g_{31} & , & g_{41} \\ g_{12} & , & 0 & , & g_{32} & , & g_{42} \\ g_{13} & , & 1 & , & g_{33} & , & g_{43} \\ g_{14} & , & 0 & , & g_{34} & , & g_{44} \end{vmatrix}$$

g^{23} est le quotient par g du mineur du potentiel g_{23} de mêmes indices dans le déterminant g.

En général, $g^{\mu\nu}$ est le quotient par g du mineur de $g_{\mu\nu}$ dans le déterminant g.

Cette propriété peut être utilisée pour calculer la dérivée du déterminant des potentiels. La dérivée d'un déterminant s'obtient en dérivant chaque élément, en le multipliant par son mineur et en faisant la somme de tous les termes obtenus. Nous aurons ainsi

$$\frac{\partial g}{\partial x_\mu} = g \sum_\sigma \sum_\tau g^{\sigma\tau} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu} \tag{11}$$

2) *Symétrie des symboles*

Il résulte du calcul des $g^{\mu\nu}$ que la symétrie des potentiels

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

[p. 42] entraîne la symétrie de leurs associés

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$$

La définition des symboles de Christoffel montre que ceux-ci sont symétriques par rapport aux indices supérieurs

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu\mu \\ \sigma \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \nu\mu \\ \sigma \end{Bmatrix}$$

La symétrie des symboles permet souvent de simplifier les sommations.

Ainsi dans l'expression

$$\sum_\tau \begin{Bmatrix} \mu\tau \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_\sigma \sum_\tau g^{\sigma\tau} \left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\tau} - \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_\sigma} \right)$$

les deux derniers termes se détruisent par l'échange les [sic] indices sommation σ et τ. On peut les supprimer à cause de la symétrie de $g^{\sigma\tau}$

On aura alors à cause de l'équation (11)

$$\sum_\tau \begin{Bmatrix} \mu\tau \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x_\mu} \tag{12}$$

Dans la plupart des applications, ds^2 est de la forme

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + g_{44}dx_4^2$$

le déterminant des $g_{\mu\nu}$ se réduit alors à sa diagonale principale et tous les $g^{\mu\nu}$ sont nuls à l'exception de

$$g^{\sigma\sigma} = \frac{1}{g^{\sigma\sigma}} \qquad (\sigma = 1,2,3,4)$$

Les symboles de Christoffel sont nuls à l'exception de

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma\sigma \\ \tau \end{bmatrix} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\tau} \qquad (\sigma \neq \tau) \\ \begin{bmatrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tau\sigma \\ \sigma \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\tau} \end{aligned}$$

pour les symboles de première espèce, et

$$(13) \qquad \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma\sigma \\ \tau \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{\tau\tau}}\frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial g_\tau} \qquad (\sigma \neq \tau) \\ \begin{Bmatrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \tau\sigma \\ \sigma \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{\sigma\sigma}}\frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\tau} \end{aligned}$$

pour ceux de deuxième espèce.

Dans le cas plus particulier que nous avons envisagé au chapitre premier où

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + g_{44}dx_4^2$$

(Nous avions alors $g_{44} = c^2 + 2V$)

[p. 43] Nous aurons

$$(14) \qquad \begin{aligned} \begin{Bmatrix} 44 \\ i \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i} \qquad & (i = 1,2,3) \\ \begin{Bmatrix} 4\sigma \\ 4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \sigma 4 \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma} \qquad & (\sigma = 1,2,3) \end{aligned}$$

les autres symboles de seconde espèce étant nuls.

* * *

Nous avons trouvé les équations du mouvement en prenant comme variable indépendante suivant la trajectoire

$$\int ds$$

c'est-à-dire le temps marqué par un chronomètre qui suit le mobile.

Il est souvent commode de prendre comme variable principale une des coordonnées x_4 qui représentera généralement l'indication de chronomètres échelonnés le long de [la] trajectoire.

On a pour (i = 1, 2, 3, 4)

$$\frac{d^2x_i}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx_i}{dx_4}\frac{dx_4}{ds}\right) = \frac{d^2x_i}{dx_4^2}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 + \frac{dx_i}{dx_4}\frac{d^2x_4}{ds^2};$$

d'où

$$\frac{d^2x_i}{dx_4^2} = \frac{d^2x_i}{ds^2}\left(\frac{ds}{dx_4}\right)^2 - \frac{d^2x_4}{ds^2}\frac{dx_i}{dx_4}\left(\frac{ds}{dx_4}\right)^2$$

Portons dans cette expression les valeurs de $\frac{d^2x_i}{ds^2}$ et $\frac{d^2x_4}{ds^2}$ tirées des équations du mouvement (10), il vient

$$\text{(15)}\qquad \frac{d^2x_i}{dx_4^2} + \sum_\mu\sum_\nu\left(\left\{ \begin{matrix}\mu\nu\\ i\end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix}\mu\nu\\ 4\end{matrix} \right\}\frac{dx_i}{dx_4}\right)\frac{dx_\mu}{dx_4}\frac{dx_\nu}{dx_4} = 0$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

En particulier dans le cas où

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + (c^2 + 2V)dt^2$$

On aura, d'après les valeurs des symboles de Christoffel calculées plus haut,

$$\text{(16)}\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{c^2+2V}\frac{dx}{dt}\left[2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\partial V}{\partial t}\right]$$

et les équations analogues en y et en z.

[p. 44] Nous avions déjà vu que cette forme du ds^2 conduit à des équations qui se confondent en première approximation avec les équations de la mécanique classique, lorsque les vitesses sont petites par rapport à c.

Lorsque ces vitesses ne sont pas négligeables, il faut adjoindre à l'expression classique de la force un terme complémentaire fonction de la vitesse.

* * *

Lorsque toutes les dérivées des potentiels sont nulles, il en est de même des symboles de Christoffel et les équations du mouvement se réduisent à

$$\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} = 0$$

ou

$$\frac{d^2 x_i}{dx_4^2} = 0$$

Nous dirons alors que le mouvement est rectiligne et uniforme.

Réciproquement, pour que le mouvement en un point soit rectiligne et uniforme quelle que soit la vitesse du mobile, il faut que les dérivées de tous les potentiels s'annulent en ce point.

Il faut, en effet, d'après les équations du mouvement, que tous les symboles de Christoffel, de seconde espèce s'annulent. On obtient en résolvant les équations qui les définissent par rapport aux dérivées des potentiels

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\tau} = \sum_\sigma \left[g_{\mu\sigma} \left\{ \begin{matrix} \nu\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} + g_{\nu\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \right]. \tag{17}$$

Cette équation s'établit facilement de la manière suivante.

D'après la définition des symboles (9) et des $g^{\mu\nu}$ (8)

$$\sum_\sigma g_{\mu\sigma} \left\{ \begin{matrix} \nu\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} = \sum_\sigma \sum_\rho g_{\mu\sigma} g^{\sigma\rho} \left[\begin{matrix} \nu\tau \\ \rho \end{matrix} \right] = \sum_\rho g_\mu^\rho \left[\begin{matrix} \nu\tau \\ \rho \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \nu\tau \\ \mu \end{matrix} \right]$$

il reste à vérifier que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\tau} = \left[\begin{matrix} \nu\tau \\ \mu \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \mu\tau \\ \nu \end{matrix} \right]. \tag{18}$$

Ceci résulte immédiatement de la définition des symboles de première espèce (6)

[p. 45] Il est possible de choisir des coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 de telle sorte que tout point libre passant en un point P ait un mouvement rectiligne et uniforme. Les dérivées des potentiels s'annuleront alors en ce point.

Soient

$$\xi_\tau = \xi_\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad\qquad (\tau = 1, 2, 3, 4)$$

les équations qui définissent le système de coordonnées dont nous voulons prouver l'existence x_1, x_2, x_3, x_4 sont des coordonnées quelconques.

Développons ces fonctions en série de Taylor,

$$\begin{aligned} \xi_\tau &= (\xi_\tau)_0 + \sum_\sigma \left(\frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\sigma}\right)_0 (x_\sigma - x_\sigma^0) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_\mu \sum_\nu \left(\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right)_0 (x_\mu - x_\mu^0)(x_\nu - x_\nu^0) + \cdots \end{aligned}$$

les expressions marquées de l'indice zéro désignent les valeurs des fonctions au point P de coordonnées (x_1° x_2° x_3° x_4°).

Nous devons montrer qu'il y a moyen de déterminer $\left(\frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\sigma}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right)_0$ de telle sorte que

$$\frac{d^2 \xi_\tau}{ds^2} = 0$$

pour tout point libre passant au point P.

Effectuons la dérivation

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_\tau}{ds^2} &= \sum_\sigma \left(\frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\sigma}\right)_0 \frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} + \frac{1}{2}\sum_\mu \sum_\nu \left(\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right)_0 \\ &\times \left[(x_\mu - x_\mu^0)\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} + 2\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} + (x_\nu - x_\nu^0)\frac{d^2 x_\mu}{ds^2}\right] + \cdots \end{aligned}$$

Au point P, tous les termes non écrits dans le développement s'annulent et il reste en remplaçant $\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2}$ par sa valeur tirée de l'équation du mouvement d'un point libre (10)

$$\frac{d^2 \xi_\tau}{ds^2} = \sum_\mu \sum_\nu \left[\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \sum_\sigma \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \sigma \end{matrix} \right\}\right] \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$

Cette expression doit s'annuler quels que soient $\frac{dx_\mu}{ds}$ et $\frac{dx_\nu}{ds}$.

[p. 46] Il faut donc que au point P

$$\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \sum_\sigma \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \sigma \end{matrix} \right\} \tag{19}$$

quels que soient μ, ν et τ.

Nous pouvons donc nous donner arbitrairement les valeurs des dérivées premières des ξ_τ et calculer les dérivées secondes par la formule précédente.

* * *

Nous avons vu qu'il existait, pour chaque point d'un corps, un système de coordonnées qui mettait en évidence les mesures effectuées en ce point sur le corps.

Les potentiels prenaient alors en ce point les valeurs exprimées par la forme

$$ds^2 = -d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2 + c^2 d\xi_4^2$$

Nous avions appelé ce système : coordonnées propres du corps en ce point, et nous les avions obtenues par un changement linéaire de coordonnées, c'est-à-dire en disposant de la valeur des dérivées premières $\frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\sigma}$ (§ 3-4) des fonctions définissant le changement de coordonnées. Nous voyons maintenant que l'on peut en outre choisir les dérivées secondes des ξ_τ par la relation (19) de telle sorte que, dans le nouveau système de coordonnées ξ_τ, les dérivées premières des potentiels s'annulent en P.

Le mouvement d'un point libre y est alors rectiligne et uniforme.

Ces coordonnées s'appellent des coordonnées de Galilée. La relativité restreinte étudie le cas où elles peuvent être employées non seulement en un point P mais dans un domaine fini. On conclut de ce [p. 47] qui précède qu'il existe en un point quelconque un système de Galilée et qu'il est toujours possible de trouver autour de ce point un domaine suffisamment petit, pour que les formules de la relativité restreinte y soient valables, avec une approximation donnée.

§ 6. Les champs électriques

[p. 48] Les propriétés électro-magnétiques du milieu nous sont connues par l'action qu'il exerce sur des particules chargées, sur les conducteurs parcourus par un courant et enfin sur les aimants.

L'action du champ sur des particules électrisées se divise en deux effets nettement distincts attribués respectivement au champ électrique et au champ magnétique. Le premier communique aux diverses particules des accélérations parallèles indépendantes de leur vitesse. Les accélérations produites par le second sont normales aux vitesses et situées dans un même plan.

Le mouvement de la particule peut être représenté par les équations suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X \\[2ex] m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y \\[2ex] m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z \end{cases}$$

où

$$(2) \qquad \begin{cases} X = e(e_x + h_z v_y - h_y v_z) \\ Y = e(e_y + h_x v_z - h_z v_x) \\ Z = e(e_z + h_y v_x - h_x v_y) \end{cases}$$

m, e, v_x, v_y, v_z représentent respectivement les masses matérielle et électrique et les composantes de la vitesse de la particule suivant trois axes rectangulaires.

[p. 49] e_x, e_y, e_z sont les composantes d'un vecteur, caractérisant le champ électrique ; la force correspondante est parallèle à ce vecteur et indépendante de la direction ou de la vitesse de la particule.

Le vecteur h_x, h_y, h_z représente le champ magnétique ; la force correspondante est perpendiculaire à ce vecteur ainsi qu'à la vitesse de la particule et est proportionnelle à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

Les fils conducteurs du courant électrique doivent leurs propriétés à des particules d'électricité, les électrons, capables de subir les actions du milieu.

Les actions subies par les électrons normalement à la section du fil produisent un déplacement d'ensemble des électrons qui constitue le courant électrique ; ce mouvement se dissipe rapidement par suite des chocs des électrons contre les molécules et se transforme en agitation thermique. Le courant ne peut se maintenir que si les électrons subissent une action continue : la force électromotrice, cause du courant.

Les actions subies par les électrons normalement à la direction du fil ne peuvent produire un courant électrique ; elles se transmettent à la masse du conducteur, et apparaissent sous forme d'effort mécanique exercé par le milieu sur le conducteur.

Les formules (2) peuvent donc être appliquées aux conducteurs, elles donneront l'action mécanique subie par le conducteur si e désigne sa charge électrique et

$$ev_x \ , \ ev_y \ , \ ev_z$$

les composantes du courant. Les actions subies par les électrons **[p. 50]** suivant la direction du fil entretiennent le courant. Elles constituent la force électromotrice du courant, proportionnelle à e_x, e_y e_z Elle est due à la différence de potentiel le long du fil et aux effets d'induction.

La loi d'induction s'exprime généralement de la manière suivante : la force électromotrice totale sur un circuit fermé est égale à la variation du flux du champ magnétique sur une surface limitée par le circuit. Cette loi est peu satisfaisante. Tout d'abord il est bien clair que la force électromotrice totale ne peut être que la somme des forces électromotrices en chaque point du conducteur ; il serait intéressant de les connaître. Mais surtout, l'action subie par les électrons du fil ne peut dépendre de la variation du champ magnétique, en dehors du fil. Cette loi doit pouvoir être considérée comme une déduction d'une loi qui ne fait intervenir que des grandeurs localisées en chaque point du fil.

On sait que le flux d'un vecteur sur une surface peut s'exprimer par une intégrale curvilique [sic] sur le contour de cette surface.

On a par le théorème de Stokes

$$\int\int_S \quad (h_x dydz + h_y dzdx + h_z dxdy) \\ = \int_C (\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz)$$

où

$$(3) \qquad \begin{cases} h_x = \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial z} - \dfrac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\[2ex] h_y = \dfrac{\partial \varphi_z}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi_x}{\partial z} \\[2ex] h_z = \dfrac{\partial \varphi_x}{\partial y} - \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{cases}$$

[p. 51] Le vecteur φ_x, φ_y, φ_z est, au signe près, le potentiel vecteur. En désignant par φ le potentiel scalaire, la force électromotrice due à la différence de potentiel et à l'induction peut s'écrire

$$(4) \qquad \begin{cases} e_x = \dfrac{\partial \varphi_x}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\[2ex] e_y = \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\[2ex] e_z = \dfrac{\partial \varphi_z}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$

Ces formules expriment tout ce que nous apprend l'exploration des champs par le mouvement des particules et des conducteurs. Le mouvement des aiguilles aimantées ne peut nous apprendre rien de neuf ; car les propriétés des aimants peuvent être interprétées par l'hypothèse de courants particulaires [sic] ou de trajectoires fermées d'électrons.

Les formules que nous avons obtenues sont identiques aux formules classiques de l'électromagnétisme lorsqu'on emploie un système d'unité tel que les unités électrostatiques et les unités électromagnétiques soient identiques. On sait qu'il suffit pour cela de choisir l'unité de temps par exemple de telle sorte que le rapport des unités des deux systèmes soit pris pour unité. Ce rapport a les dimensions d'une vitesse et est égal à la vitesse de la lumière dans le vide. Il suffit donc de prendre cette vitesse comme unité de vitesse.

Si on voulait employer des unités C.G.S., il faudrait introduire des facteurs numériques et préciser si on emploie des unités U.E.M. ou U.E.S.

Nous avons obtenu les équations de l'électromagnétisme **[p. 52]** pour un système particulier de coordonnées. Nous allons maintenant chercher des équations dont la forme algébrique ne dépende pas du choix des coordonnées et qui se réduisent aux équations que nous venons de trouver lorsqu'on emploie les coordonnées particulières convenables.

⋆ ⋆ ⋆

Ces équations peuvent être écrites sous une forme condensée en adoptant les notations suivantes. Nous désignerons les potentiels par

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ \varphi_4$$

au lieu de

$$\varphi_x, \ \varphi_y, \ \varphi_z, \ \varphi$$

et nous poserons

$$\begin{array}{ll} F_{14} = e_x & F_{23} = h_x \\ F_{24} = e_y & F_{31} = h_y \\ F_{34} = e_z & F_{12} = h_z \end{array} \tag{5}$$

Les équations (3) et (4) s'écrivent alors

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

Il n'y a que 6 équations distinctes car

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$$

et $F_{\alpha\beta}$ est nul lorsque les deux indices sont égaux.

Les équations (2) peuvent être transformées d'une manière analogue, en remplaçant

$$ev_x, \ ev_y, \ ev_z, \ e$$

respectivement par

$$I^1, I^2, I^3, I^4.$$

[p. 53] et, en désignant les composantes

$$X, Y, Z$$

de la force par

$$-f_1, -f_2, -f_3$$

elles s'écrivent

$$f_\sigma + \sum_\alpha I^\alpha F_{\alpha\sigma} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3) \tag{7}$$

Lorsque nous explorons les champs au moyen de particules non chargées, les trajectoires sont caractérisées par les équations aux variations

$$\delta \int ds = 0$$

où ds^2 est une forme quadratique des différentielles des coordonnées. Lorsque le champ s'explore au moyen d'une particule chargée de masse matérielle m et de masse électrique e cette variation ne sera plus nulle. L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire est que cette variation soit égale à la variation d'une forme linéaire de ces différentielles.

$$-\varphi_1 dx_1 - \varphi_2 dx_2 - \varphi_3 dx_3 - \varphi_4 dx_4$$

On écrira alors

$$\delta \int \left[m\, ds + e \sum_\alpha \varphi_\alpha dx_\alpha \right] = 0 \tag{8}$$

Cette loi garde la même forme algébrique lorsqu'on fait un changement quelconque de coordonnées. Elle est donc appliquable [sic] quel que soit le mode de repérage utilisé pour les divers événements.

Nous avons calculé (§ 5-7) le terme provenant de la variation du premier terme

$$f_\sigma = m \left\{ \sum_\mu g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \sum_\mu \sum_\nu \left[\begin{array}{c} \mu\nu \\ \sigma \end{array} \right] \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \right\} \tag{9}$$

Ce terme doit donc être égal et de signe contraire à celui que **[p. 54]** l'on obtient en appliquant à la fonction

$$F = \sum_\alpha \varphi_\alpha u^\alpha \quad \text{ou} \quad u^\alpha = \frac{dx_\alpha}{ds}$$

la formule du calcul des variations (§ 5-5)

$$\frac{\partial F}{\partial x_\sigma} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial u^\sigma}\right) = 0$$

Effectuons les dérivations

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_\sigma} &= \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\sigma} u^\alpha \\ \frac{\partial F}{\partial u^\sigma} &= \varphi_\sigma \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial u^\sigma}\right) &= \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} = \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\alpha} u^\alpha \end{aligned}$$

Il vient ainsi

$$f_\sigma + \sum_\alpha e\, u^\alpha \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\alpha}\right) = 0$$

En posant

$$I^\alpha = e\frac{dx_\alpha}{ds} \tag{10}$$

et

$$F_{\alpha\sigma} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\alpha} \tag{11}$$

on obtient

$$f_\sigma + \sum_\alpha I^\alpha F_{\alpha\sigma} = 0 \tag{12}$$

formule identique à l'équation (7).

Les équations (9) (10) (11) et (12) expriment, d'une manière conforme au principe de relativité, l'action des champs sur les particules matérielles électrisées.

Lorsqu'on emploie les coordonnées utilisées au début du paragraphe, l'équation (12) ($\sigma = 1, 2, 3$) se réduit en multipliant les deux membres par $\frac{ds}{dt}$ à l'équation (2) tandis que l'équation (9) diffère de (1) et ne peut lui identifiée qu'approximativement.

[p. 55] Les équations (1) doivent être remplacées par

$$-m\frac{d^2x}{ds^2} + X\frac{ds}{dt} = 0$$

et les équations analogues.

On peut encore écrire

$$\begin{aligned} m\frac{d}{dt}\frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}} &= X \\ m\frac{d}{dt}\frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}} &= Y \\ m\frac{d}{dt}\frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}} &= Z \end{aligned}$$

Ce sont les équations de la dynamique de la relativité restreinte.

Elles peuvent être interprétées de la manière suivante. En les comparant aux équations classiques on pourra dire que l'on remplace la constante m par un facteur variable fonction de la vitesse. On parlera alors de masses variables. On peut, au contraire, transformer les équations de manière à les mettre sous la forme (1) en remplaçant X, Y, Z par une fonction de ces quantités et des vitesses. On parlera alors de forces variables avec la vitesse. Ce dernier point de vue paraît plus logique puisque X, Y, Z sont déjà fonction de la vitesse et qu'il s'agit simplement de modifier la forme de cette fonction.

1) Masses variables :

Supposons tout d'abord la masse [1] perpendiculaire à la vitesse, la grandeur de la vitesse ne varie pas suivant la trajectoire, les équations (13) s'écrivent

$$\frac{m}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

et les équations analogues.

[p. 56] Supposons au contraire une force dirigée suivant la vitesse, et prenons l'axe des x dans leur direction commune, nous aurons

(1) Dans le manuscrit, «masse» est remplacé par «force». Cette correction ne semble pas être de la main de G. Lemaître.

$$m\frac{d}{dt}\frac{v_x}{(1-v_x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{m}{(1-v_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2x}{dt^2}=X$$

Nous pouvons donc conserver les équations fondamentales de la mécanique, en y remplaçant la masse constante par une masse variable dépendant des directions relative de la force et de la vitesse.

Nous aurons ainsi une masse transversale

$$\frac{m}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}$$

Nous avons rétabli le facteur c qui s'introduit lorsque l'unité de temps est quelconque.

La masse longitudinale sera

$$\frac{m}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$$

2) Forces variables :

On peut interpréter tout aussi simplement les équations (13) sans faire intervenir de masses variables.

On a

$$\frac{d}{dt}\frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}=\frac{1}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{dv_x}{dt}+\frac{v_x}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}$$

La première équation (13) s'écrit alors

$$X=\frac{m}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{dv_x}{dt}+\frac{m}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}}\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}\right).$$

Multiplions cette équation et les équations analogues en y et **[p. 57]** en z respectivement par v_x, v_y, v_z, et additionnons membre à membre. Il vient

$$\begin{aligned}Xv_x+Yv_y+Zv_z \;&=\; \left(\frac{m}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{mv^2}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\\ &\quad\times\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}\right)\end{aligned}$$

ou

$$Xv_x + Yv_y + Zv_z = \frac{m}{(1 - v^2)^{\frac{3}{2}}} \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right)$$

Les équations du mouvement peuvent alors s'écrire

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = [X - v_x(Xv_x + Yv_y + Zv_z)] \sqrt{1 - v^2}$$

ou, en prenant des unités quelconques,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \left[X - \frac{v_x}{c^2}(Xv_x + Yv_y + Zv_z) \right] \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

On peut donc dire que l'équation fondamentale de la mécanique est conservée, mais que l'expression de la force a changé. La notion de masse variable peut être utile dans certaines applications, il ne faut pourtant pas perdre de vue le caractère arbitraire de telles considérations. On pourrait toujours multiplier les deux membres des équations du mouvement par un facteur variable quelconque et considérer le produit de ce facteur par la masse comme une masse variable.

Chapitre III. Production du champ par mouvement relatif

§ 7. Mouvement uniformément accéléré

[p. 58] Nous avons vu qu'il est possible de choisir un système de coordonnées de telle sorte qu'au voisinage d'un point la géométrie soit euclidienne et le mouvement des points libres rectiligne et uniforme. Lorsque ces conditions sont réalisées dans un certain domaine le champ peut être représenté par la forme

$$ds^2 = -d\xi^2 - d\eta^2 - d\zeta^2 + c^2 d\tau^2$$

la géométrie de corps immobiles y est euclidienne. ξ, η, ζ sont les coordonnées cartésiennes par rapport à un système d'axes rectangulaires. τ est le temps marqué par des chronomètres immobiles, ces chronomètres sont interchangeables et leurs indications égales sont simultanées. Enfin la vitesse de la lumière est constante en tout point.

Nous appellerons un tel champ, un champ de Galilée.

Considérons un corps qui se déplace dans le champ de Galilée et supposons qu'un observateur explore le champ au moyen d'instruments liés à ce corps. Il mesure des longueurs et des temps, observe le mouvement des particules libres, ou les rayons lumineux. Comment vont se présenter pour cet observateur les propriétés du champ.

La solution de la mécanique classique est simple.

L'observateur entraîné rapporte ses mesures à trois axes rectangulaires en mouvement. Tout se passe comme si ces axes **[p. 59]** étaient en repos, mais les points libres en mouvement rectiligne et uniforme dans le système fixe, décrivent dans le système mobile des trajectoires dont l'accélération est déterminée par les forces d'inertie : réaction d'entraînement, force centrifuge et force centrifuge composée. La théorie du mouvement relatif calcule ces forces lorsqu'on donne les équations du mouvement du système mobile. Si ce mouvement est une translation rectiligne uniformément accélérée, les corps seront soumis à la seule réaction d'entraînement égale à l'accélération constante mais dirigée en sens contraire. Tout se passera comme si le système était immobile et qu'il y régnait un champ de gravitation constant. Cette accélération sera la même pour tous les mobiles. Les rayons lumineux la subiront aussi.

Dans la nouvelle mécanique, la théorie du mouvement relatif est moins immédiate. Nous savons qu'un corps en mouvement paraît contracté dans le sens du mouvement. Si donc, un corps est mis en mouvement il doit paraître se contracter davantage au fur et à mesure que sa vitesse augmente. Il faut pour cela que ses divers points se rattrapent. Au contraire, si nous arrêtons brusquement un corps, nous ne pouvons arrêter tous ses points simultanément, il faut que nous lui laissions perdre sa contraction apparente. Si nous arrêtions ses extrémités au même moment, nous le déformerions. En mesurant sa longueur directement après l'arrêt nous ne trouverions plus la même valeur qu'auparavant, nous constaterions une contraction réelle, précisément égale à la contraction apparente qui faussait les mesures indirectes de l'observateur fixe avant l'arrêt.

[p. 60] Un corps solide en mouvement est donc un corps qui paraît se contracter dans le sens de la vitesse proportionnellement à

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Un corps dont les divers points se déplaceraient dans le système fixe suivant les équations classiques du mouvement d'un solide, paraîtrait ne pas se déformer et par conséquent se déformerait en réalité. Un observateur qui mesurerait directement ses dimensions constaterait qu'elles varient.

Les équations du mouvement d'un solide ne peuvent être conservées que lorsque la vitesse est constante au même point (ξ, η, ζ), ce qui arrive pour une translation rectiligne uniforme, une rotation uniforme et la combinaison de ces deux mouvements (mouvement hélicoïdal).

En dehors de ces cas, le mouvement d'un solide est-il possible ? En particulier est-il possible de réaliser le mouvement d'un solide de manière à créer artificiellement un champ de gravitation constant ? Pouvons-nous trouver dans la mécanique l'équivalent du mouvement d'entraînement uniformément accéléré ?

Il faut pour cela écrire dans le système fixe ξ, η, ζ, τ les équations du mouvement d'un corps dont les différents points décrivent des trajectoires parallèles (suivant l'axe des ξ par exemple) et qui subit suivant cette direction une contraction proportionnelle à

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Traçons dans ce corps des axes x, y, z qui coïncident à l'instant

$$\tau = 0$$

[p. 61] avec les axes ξ, η, ζ du système fixe.

Les coordonnées x, y, z de chaque point du mobile mesurées par mesures directes par rapport à ce système d'axes sont donc constantes.

Les équations du mouvement d'un point quelconque (x, y, z) sont de la forme

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \xi &= f(\tau, x) \\ \eta &= y \\ \zeta &= z \end{cases}$$

puisque les mesures normales à la vitesse ne subissent pas la contraction.

La vitesse du point est

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial \tau}$$

La contraction apparente est

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Il faut donc que

$$\text{(2)} \qquad \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)^2 = 1$$

C'est une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Nous allons l'intégrer en employant la méthode des caractéristiques.

Posons

$$p = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad , \quad q = \frac{\partial \xi}{\partial \tau}$$

Elle s'écrit

$$p^2 + \frac{1}{c^2} q^2 = 1$$

Les équations des caractéristiques sont alors

$$\frac{dx}{p} = \frac{d\tau}{\frac{1}{c^2}q} = \frac{-dp}{0} = \frac{-dq}{0} = \frac{d\xi}{p^2 + \frac{q^2}{c^2}}$$

[p. 62] Ces équations s'intègrent immédiatement : p et q doivent être constants. Les caractéristiques sont les lieux des points où la vitesse q est constante.

L'intégrale est un lieu de caractéristiques.

Nous pouvons la déterminer en nous donnant le mouvement d'un point M_0 du mobile.

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ \xi_0 & = & \varphi(\tau_0) \end{cases}$$

où φ est une fonction arbitraire de τ_0.

On aura alors

$$q_0 = \frac{d\varphi}{d\tau_0} \quad , \quad p_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2}$$

Une caractéristique passant par M_0 a pour équations

$$\frac{x}{p_0} = \frac{\tau - \tau_0}{\frac{1}{c^2}q_0} = \frac{\xi - \xi_0}{1} \quad , \quad p = p_0 \quad , \quad q = q_0$$

ou

$$\xi = \varphi(\tau_0) + \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2}}$$

$$\tau = \tau_0 + \frac{1}{c^2}\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2}}\frac{d\varphi}{d\tau_0}$$

Nous obtenons ainsi une représentation paramétrique de l'intégrale. On obtiendrait la fonction $\xi = f(\tau,x)$ en éliminant τ_0 entre ces deux équations.

Voyons maintenant comment apparaissent les propriétés du champ à un observateur qui se sert d'instruments de mesure liés au solide.

Nous savons que ces propriétés dépendent de **[p. 63]** l'invariant ds^2, dont l'expression au moyen des coordonnées du système fixe est

$$ds^2 = -d\xi^2 - d\eta^2 - d\zeta^2 + c^2 d\tau^2$$

Exprimons ces différentielles au moyen des coordonnées du système mobile

$$\begin{aligned}
d\xi &= \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2}} + \left[1 + \frac{1}{c^2}\frac{x}{\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2\varphi}{d\tau_0^2}\right]\frac{d\varphi}{d\tau_0}d\tau_0 \\
d\eta &= dy \\
d\zeta &= dz \\
d\tau &= \frac{1}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau_0}\frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2}} + \left[1 + \frac{1}{c^2}\frac{x}{\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2\varphi}{d\tau_0^2}\right]d\tau_0
\end{aligned}$$

ds^2 peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2\right] \\
&\quad \times \left[1 + \frac{1}{c^2}\frac{x}{\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2\varphi}{d\tau_0^2}\right]^2 d\tau_0^2
\end{aligned}$$

Cette expression définit complètement les propriétés du champ.

Quelle forme faut-il donner à la fonction φ pour que l'accélération que prend un corps abandonné à lui-même ne dépende pas du temps mesuré par un chronomètre entraîné avec le corps ? Nous avons calculé (§ 5-14) les valeurs des symboles de Christoffel dans le cas où g_{44} est le seul potentiel qui ne soit pas constant. Il en résulte que l'accélération est

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\left\{\begin{array}{c}44 \\ i\end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x}$$

[p. 64] Le temps t marqué par un chronomètre entraîné est au point

$$dt = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2} d\tau_0$$

Prenons comme coordonnée au lieu de τ_0 le temps t défini par l'équation

$$t = \int_0^{\tau_0} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2} d\tau_0 \tag{4}$$

L'invariant s'écrit alors

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\left[1 + \frac{1}{c^2}\frac{x}{\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2\varphi}{d\tau_0^2}\right]^2 dt^2 \tag{5}$$

Pour que l'accélération soit indépendante de t au point

$$x = 0,$$

il faut que le coefficient de t soit égal à une constante

$$\frac{\frac{d^2\varphi}{d\tau_0^2}}{\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = g \tag{6}$$

L'invariant est alors

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 dt^2 \tag{7}$$

L'équation du mouvement d'un point libre est

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x}{ds^2} = -g\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)$$

L'observateur entraîné n'aura plus aucun moyen de s'apercevoir d'une variation quelconque du champ. Il attribuera l'accélération des mobiles à la présence d'un champ de gravitation constant.

En faisant le changement de variable

$$\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)^2 = 1+\frac{2gX}{c^2} \tag{8}$$

on peut mettre ds^2 sous la forme

$$ds^2 = -\frac{dX^2}{1+\frac{2gX}{c^2}} - dy^2 - dz^2 + c^2\left(1+\frac{2gX}{c^2}\right)dt^2 \tag{9}$$

[p. 65] Voyons ce que deviennent les équations générales du mouvement rectiligne d'un solide dans le cas particulier que nous venons d'examiner. Nous obtiendrons ainsi les équations correspondant au mouvement uniformément accéléré de l'ancienne mécanique. La fonction $\varphi(\tau_0)$ vérifie alors la relation (6).

Cette équation s'intègre immédiatement.

On obtient, en choisissant la constante d'intégration de telle sorte que $\frac{d\varphi}{d\tau_0}$ s'annule avec τ_0,

$$\frac{\frac{d\varphi}{d\tau_0}}{\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = g\tau_0 \;\; ;$$

résolvons cette équation par rapport à $\frac{d\varphi}{d\tau_0}$

$$\frac{d\varphi}{d\tau_0} = \frac{g\tau_0}{\sqrt{1+\left(\frac{g\tau_0}{c}\right)^2}}$$

Intégrons.

$$\varphi = \int_0^{\tau_0} \frac{g\tau_0 \; d\tau_0}{\sqrt{1+\left(\frac{g\tau_0}{c}\right)^2}} = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+\left(\frac{g\tau_0}{c}\right)^2}-1\right]$$

Portons les valeurs de φ et de $\frac{d\varphi}{d\tau_0}$ dans les équations (3) ; nous obtenons les équations du mouvement sous forme paramétrique.

$$(10) \qquad \begin{cases} \xi &= \sqrt{1+\left(\frac{g\tau_0}{c}\right)^2}\left(\frac{c^2}{g}+x\right)-\frac{c^2}{g} \\ \tau &= \tau_0\left(1+\frac{gx}{c^2}\right) \end{cases}$$

L'élimination de τ_0 entre ces deux équations se fait maintenant sans difficulté. On obtient

$$(11) \qquad \xi = \frac{c^2}{g}\left[-1+\sqrt{\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)^2+\left(\frac{g\tau}{c}\right)^2}\right]$$

Cherchons enfin les équations par lesquelles on passe des coordonnées x, t du système mobile à celles ξ, τ du système fixe. Le temps t est défini par l'équation (4) qui s'écrit en tenant **[p. 66]** compte de la valeur de $\frac{d\varphi}{d\tau_0}$.

$$t = \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau_0}{\sqrt{1+\left(\frac{g\tau_0}{c}\right)^2}} = \frac{c}{g}\operatorname{arc\,sh}\frac{g\tau_0}{c}$$

d'où

$$\tau_0 = \frac{c}{g}\operatorname{sh}\frac{gt}{c}$$

Les équations définissant la transformation deviennent en exprimant τ_0 au moyen de t

$$(12) \qquad \begin{cases} \xi &= \frac{c^2}{g}\left[-1+\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\operatorname{ch}\frac{gt}{c}\right] \\ \tau &= \frac{c}{g}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\operatorname{sh}\frac{gt}{c} \end{cases}$$

En les résolvant par rapport à x et t, on trouve

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{c^2}{g}\left[-1+\sqrt{\left(1+\frac{g\xi}{c^2}\right)^2-\left(\frac{g\tau}{c}\right)^2}\,\right] \\
t &= \frac{1}{2}\frac{c}{g}\lg\frac{1+\frac{g\xi}{c^2}+\frac{g\tau}{c}}{1+\frac{g\xi}{c^2}-\frac{g\tau}{c}}
\end{aligned}
$$

On obtiendrait immédiatement les équations analogues aux précédentes lorsqu'on emploie au lieu de x la coordonnée X définie par l'équation (8).

§ 8. Rotation uniforme

[p. 67] Le champ de Galilée peut se représenter en coordonnées semi-polaires r, θ, z.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

par l'expression

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

Si nous imaginons un système tournant autour de l'axe des z du système de Galilée avec une vitesse angulaire constante ω, dans le nouveau système ds^2 s'exprimera par

$$ds^2 = -dr^2 - r^2(d\theta - \omega dt)^2 - dz^2 + c^2 dt^2 \tag{1}$$

où θ est maintenant mesuré par rapport à ces axes entraînés dans le mouvement. Nous allons étudier les propriétés géométriques des corps immobiles dans ce système. Nous poserons

$$\delta r = \delta\theta = \delta z = 0$$

dans l'équation de simultanéité (§ 3-1).

On obtient

$$-r^2(d\theta - \omega dt)(-\omega\delta t) + cdt\delta t = 0$$

ou

$$\omega r^2(d\theta - \omega dt) + c^2 dt = 0$$

Nous avons vu quelles particularités présente dans ce cas la simultanéité sur un contour fermé, et comment l'expérience de Monsieur Sagnac les met en évidence.

Éliminons dt entre l'équation fondamentale (1) et **[p. 68]** l'équation de simultanéité, nous devons obtenir l'élément de distance. Nous aurons en changeant les signes

$$d\sigma^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\theta^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} + dz^2 \tag{3}$$

Nous voyons que la longueur d'un rayon

$$d\theta = dz = 0$$

est égale à

$$\int_0^r dr = r$$

tandis que celle de la circonférence

$$dr = 0 \qquad\qquad dz = 0$$

est

$$\int_0^{2\pi} \frac{r\,d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}$$

Le rapport de la circonférence au diamètre est plus grand que π.

★ ★ ★

On obtiendrait immédiatement ce résultat en appliquant la correction de Lorentz aux mesures indirectes lues sur des instruments immobiles dans le champ de Galilée.

Un observateur qui photographierait d'un point de l'axe, un disque tournant autour de cet axe, obtiendrait une image du disque, sur laquelle le rapport de la circonférence au diamètre est égal à π puisque la géométrie des corps immobiles dans le champ de Galilée est euclidienne.

La correction de Lorentz est nulle pour la diamètre qui se déplace normalement à sa direction, la circonférence seule est plus grande qu'elle ne paraît, dans le rapport

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

[p. 69] Des observateurs effectuant des mesures géométriques de haute précision avec des règles identiques trouveront que la géométrie sur le disque n'est pas euclidienne.

Ils pourront naturellement toujours rejeter cette conclusion s'ils préfèrent admettre que leurs règles se déforment par suite de la présence du champ centrifuge. Ils pourront faire diverses hypothèses sur ces déformations. Le plus simple est de supposer que le mètre se raccourcit dans le rapport

$$\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2}$$

lorsqu'on le dirige normalement au rayon pour mesurer la circonférence. Si on fait le changement de variable

$$\frac{r^2}{1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2}=\rho^2 \tag{4}$$

d'où on tire

$$dr=\frac{d\rho}{\left(1+\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

où ρ représente alors la longueur de la circonférence divisée par 2π, l'élément de distance prend la forme [2]

$$d\sigma^2=\frac{d\rho^2}{(1+\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2)^3}+\rho^2d\theta^2+dz^2 \tag{5}$$

On peut donc supposer que la géométrie reste euclidienne mais que les règles dirigées suivant la direction de la force centrifuge sont allongées dans le rapport [3]

$$(1+\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{(1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On voit que la géométrie est euclidienne sur un cylindre circulaire ayant pour axe l'axe de rotation.

[p. 70] Enfin on peut chercher quelle dilatation ou quelle contraction indépendante de la direction il faut attribuer aux règles pour pouvoir prétendre que la géométrie sur un disque tournant est la géométrie euclidienne plane.

(2) Dans le manuscrit, le «3» placé ici en exposant est supprimé à l'encre rouge.

(3) Dans le manuscrit, le «3/2» qui apparaît deux fois en exposant dans cette équation est supprimé de la même manière.

Il faut pour cela mettre l'élément de distance, sur le disque, sous la forme

$$dr^2 + \frac{r^2 d\theta^2}{1 - \frac{\omega^2}{c^2} r^2} = \frac{dy^2 + y^2 d\theta^2}{x^2}$$

où x est la dilatation supposée des mètres, et y la longueur du rayon corrigée de cette dilatation.

On doit intégrer les deux équations

$$dr = \frac{dy}{x}$$

et

$$\frac{r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2} r^2}} = \frac{y}{x}$$

Divisons membre à membre

$$\frac{dr}{r}\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2} r^2} = \frac{dy}{y}$$

et intégrons.

$$y = \frac{2r}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2} r^2}} e^{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2} r^2} - 1}$$

et

$$x = \frac{2\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2} r^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2} r^2}} e^{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2} r^2} - 1}$$

x tend vers zéro lorsque r tend vers c/ω. Pour c/ω suffisamment petit, on a

$$x = 1 - \frac{3}{4}\frac{\omega^2}{c^2} r^2 - \frac{19}{132}\frac{\omega^6}{c^6} r^6 + \cdots$$

Cherchons quelle forme doit avoir une surface de révolution pour que la géométrie y soit euclidienne lorsque la surface est animée d'une rotation ω autour de son axe.

[p. 71] D'après (5), le profil de la surface est déterminé par l'équation

$$\frac{d\rho^2}{(1+\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2)^3} + dz^2 = d\rho^2$$

On aura alors sur la surface

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

qui montre que la géométrie y est euclidienne.

Si nous employons la variable r liée à ρ par (4)

$$dr^2 + dz^2 = \frac{dr^2}{(1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2)^3}$$

Le profil de la génératrice de la surface de révolution cherché est donné par

$$z = \int \sqrt{\left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2}\right)^3 - 1}\ dr$$

z tend vers l'infini lorsque r tend vers c/ω.

Pour r petit on aura en développant en série

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\omega}{c}r^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}r^2+\cdots\right)$$

Cette surface est donc osculatrice à un paraboloïde, à l'origine et asymptotique au cylindre ($r = c/\omega$). Sur une surface animée de la rotation ω la géométrie est la même que sur un plan euclidien. Supposons qu'on arrête le mouvement de rotation. Un observateur qui arpenterait la surface constaterait, pendant l'arrêt, les mêmes déformations de la surface que celles qu'on constaterait, au repos, en observant les déformations d'une surface plane qu'on appliquerait sur la surface de révolution.

[p. 72] Le mouvement des mobiles par rapport au système tournant ne présente rien de particulier. La théorie classique du mouvement relatif est appliquable [sic] puisque les équations de transformation entre les coordonnées des deux systèmes peuvent être conservées.

Remarquons enfin que si la vitesse de rotation vient à changer le mobile doit nécessaire se déformer puisque le rapport

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2} r^2}}$$

de la circonférence au diamètre doit changer. Il faut donc bien que la circonférence ou le diamètre change de longueur ou que tous deux se déforment.

§ 9. Équation générale des champs d'inertie

[p. 73] Lorsque les potentiels sont constants le mouvement d'un point libre est rectiligne et uniforme ; nous avons affaire à ce que nous avons appelé un champ de Galilée. Si nous faisons un changement de coordonnées, les potentiels ne sont plus constants, les dérivées secondes des coordonnées ne s'annulent plus suivant la trajectoire des points libres ; nous obtenons ce que nous appellerons un champ d'inertie.

Le champ d'inertie est donc caractérisé par le fait qu'il est possible par un changement de coordonnées

$$\xi_\sigma = \xi_\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

de transformer la forme fondamentale ds^2 en une forme quadratique à coefficients constants

$$ds^2 = \sum_\sigma \sum_\tau \gamma_{\sigma\tau} d\xi_\sigma d\xi_\tau \tag{2}$$

Nous avons vu que dans ce cas les dérivées des équations de transformation vérifient les relations (α, β, τ = 1, 2, 3, 4) (§ 5-19)

$$\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \sum_\sigma \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \tag{3}$$

où le symbole de Christoffel de deuxième espèce est formé avec les potentiels $g_{\mu\nu}$ du système de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4.

Nous nous proposons d'éliminer de ces équations les fonctions ξ_σ. Prenons la dérivée de (3) par rapport à x_γ.

$$\frac{\partial^3 \xi_\tau}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} = \sum_\sigma \frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_\sigma \partial x_\gamma} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} + \sum_\sigma \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\}$$

[p. 74] Transformons la dérivée seconde du second membre en appliquant l'équation (3), nous aurons, en remplaçant l'indice sommatoire σ par p,

$$\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_\rho \partial x_\gamma} = \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} \rho\gamma \\ \sigma \end{matrix} \right\}$$

Il vient

$$\frac{\partial^3 \xi_\tau}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} = \sum_\sigma \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\sigma} \left[\sum_\rho \left\{ \begin{matrix} \rho\gamma \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \rho \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \right]$$

Cette équation doit être vérifiée quels que soient

$$(\alpha, \beta, \gamma, \tau = 1, 2, 3, 4)$$

Elle est donc encore vérifiée si on permute les indices α et γ. Le premier membre n'est pas modifié. En soustrayant membre à membre les deux expressions, nous obtenons

$$\sum_\sigma \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\sigma} R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} = 0 \tag{4}$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} \quad = \quad & -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} \beta\gamma \\ \sigma \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \\ & -\sum_\rho \left\{ \begin{matrix} \rho\alpha \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta\gamma \\ \rho \end{matrix} \right\} + \sum_\rho \left\{ \begin{matrix} \rho\gamma \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \rho \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

L'équation (4) pour (τ = 1, 2, 3, 4) peut être considérée comme un système de quatre équations linéaires et homogènes à quatre inconnues

$$R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

Le déterminant de ce système est le déterminant fonctionnel des **[p. 75]** équations de transformation (1). Nous le supposerons naturellement différent de zéro. Les équations (4) sont donc équivalentes à

$$R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} = 0 \qquad\qquad (\alpha, \beta, \gamma, \sigma = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

Ce sont les équations générales des champs d'inertie.

En géométrie ces équations sont les équations d'un espace euclidien.

À deux variables elles expriment la condition pour qu'une surface soit appliquable [sic] sur un plan euclidien.

* * *

Lorsque la forme fondamentale peut être réduite par un changement de coordonnées à une forme à coefficients constants, les expressions (5) ne s'annulent plus. Elles jouissent de propriétés importantes sur lesquelles Einstein a basé l'étude des champs de gravitation dans le cas général.

Pour établir ces propriétés nous utiliserons un système de coordonnées particulier, pour lequel les calculs se simplifient beaucoup.

Nous avons vu qu'on pouvait toujours disposer de la valeur en un point M, des dérivées secondes des fonctions de transformation (1), de telle sorte qu'en ce point les dérivées des potentiels s'annulent dans le système ξ_σ. Il suffit pour cela de leur donner en M la valeur (3). Nous pouvons de plus disposer des dérivées premières

$$\frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\sigma}$$

de telle sorte que les potentiels $\gamma_{\sigma\tau}$ se réduisent en M **[p. 76]** aux valeurs

$$\gamma_{\sigma\tau} = g_\sigma^\tau = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sigma = \tau \\ 0 & \text{si} \quad \sigma \neq \tau \end{cases}$$

Certaines coordonnées seront imaginaires. Cela n'a aucun inconvénient pour les calculs que nous faisons ici. Il est d'ailleurs facile de repasser aux variables réelles.

En portant dans l'expression (2) de ds^2 les valeurs des différentielles tirées de (1), on doit obtenir

$$ds^2 = \sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

il en résulte que

$$g_{\alpha\beta} = \sum_\sigma \sum_\tau \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x_\beta} \gamma_{\sigma\tau} \tag{7}$$

Les symboles de Christoffel qui figurent dans (5) ont pour définition

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_\tau g^{\sigma\tau} \left(\frac{\partial g_{\alpha\tau}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\tau} \right) \tag{8}$$

outre les potentiels $g_{\sigma\tau}$ ces expressions contiennent les quantités $g^{\sigma\tau}$ associées à ces potentiels. Nous les avons définies par les équations.

$$\sum_{\rho} g_{\alpha\rho} g^{\beta\rho} = g_{\alpha}^{\beta} \tag{9}$$

Si nous posons de même

$$\sum_{\rho} \gamma_{\alpha\rho} \gamma^{\beta\rho} = g_{\alpha}^{\beta} \tag{10}$$

les $g^{\alpha\beta}$ s'exprimeront en fonction des $\gamma^{\sigma\tau}$ par l'équation

$$g^{\alpha\beta} = \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \xi_{\sigma}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial \xi_{\tau}} \gamma^{\sigma\tau} \tag{11}$$

Il suffit de montrer que cette expression vérifie la définition (9). On a en effet par (7) et (11)

$$\sum_{\rho} g_{\alpha\rho} g^{\beta\rho} = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \sum_{\sigma_1} \sum_{\tau_1} \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \xi_{\tau}}{\partial x_{\rho}} \frac{\partial \xi_{\rho}}{\partial x_{\tau_1}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial \xi_{\sigma_1}} \gamma_{\sigma\tau} \gamma^{\sigma_1 \tau_1}$$

[p. 77] Effectuons la sommation en ρ

$$\sum_{\rho} \frac{\partial \xi_{\tau}}{\partial x_{\rho}} \frac{\partial x_{\rho}}{\partial \xi_{\tau_1}} = \frac{d\xi_{\tau}}{d\xi_{\tau_1}} = g_{\tau_1}^{\tau}$$

puis celle en τ et τ_1, en vertu de (10),

$$\sum_{\tau} \sum_{\tau_1} g_{\tau_1}^{\tau} \gamma_{\sigma\tau} \gamma^{\sigma_1 \tau_1} = \sum_{\tau} \gamma_{\sigma\tau} \gamma^{\sigma_1 \tau} = g_{\sigma}^{\sigma_1}$$

Il reste ainsi

$$\sum_{\sigma} \sum_{\sigma_1} \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial \xi_{\sigma_1}} g_{\sigma}^{\sigma_1} = \sum_{\sigma} \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial \xi_{\sigma}} = \frac{dx_{\beta}}{dx_{\alpha}} = g_{\alpha}^{\beta}$$

C.Q.F.D.

De l'équation (10) il résulte qu'en M les équations

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha}^{\beta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial \xi_{\gamma}} = 0 \tag{12}$$

entraînent

$$\gamma^{\alpha\beta} = g_{\alpha}^{\beta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial \xi_{\gamma}} = 0$$

Voyons ce que devient en M l'expression (5) lorsqu'on exprime les symboles de Christoffel au moyen des fonctions ξ et des γ.

Les termes de cette expression contiennent les potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\gamma^{\alpha\beta}$ et les dérivées premières et secondes de ces quantités.

Les termes qui ne contiennent aucun dérivée sont ceux que l'on obtient en annulant les dérivées, c'est-à-dire en supposant que les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont des constantes ; nous avons vérifié que ces termes s'annulent (6).

Les termes qui contiennent des dérivées premières s'annulent en M en vertu de (12) et (13). Il nous reste donc à calculer ceux qui contiennent des dérivées secondes.

Ces dernières ne se trouvent que dans les deux premiers termes de (5).

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{ \begin{matrix} \beta\gamma \\ \sigma \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\}$$

[p. 78] Calculons le second en ne tenant compte que des termes contenant des dérivées secondes.

Nous obtiendrons ensuite le premier en permutant les indices α et γ :

Nous aurons

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\sum_\tau g^{\sigma\tau}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\tau}}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\tau}}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\tau \partial x_\gamma}\right) + \cdots$$

Les dérivées secondes sont égales d'après (7) à

$$\frac{\partial^2 g_{\alpha\tau}}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = \sum_\lambda \sum_\rho \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\tau}\frac{\partial^2 \gamma_{\lambda\rho}}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} + \cdots$$

mais

$$\frac{\partial^2 \gamma_{\lambda\rho}}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial^2 \gamma_{\lambda\rho}}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\nu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\beta}\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\gamma} + \cdots$$

les termes non écrits ne contenant pas de dérivées secondes.

Il vient donc

$$\frac{\partial^2 g_{\alpha\tau}}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = \sum_\lambda \sum_\mu \sum_\nu \sum_\rho \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\beta}\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\tau}\frac{\partial^2 \gamma_{\lambda\rho}}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\nu} \tag{14}$$

Les autres dérivées s'obtiennent en permutant les indices α, β, γ, τ ; cela revient à permuter les indices correspondants λ, μ, ν, ρ.

D'autre part, (11) et (13)

$$g^{\sigma\tau} = \sum_{\eta} \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\eta} \frac{\partial x_\tau}{\partial \xi_\eta}$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} = \\ &\frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\rho} \sum_{\eta} \sum_{\tau} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\beta} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\tau} \frac{\partial x_\tau}{\partial \xi_\eta} \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\eta} \\ &\times \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\lambda\rho}}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\nu} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\rho}}{\partial \xi_\lambda \partial \xi_\nu} - \frac{\partial^2 \gamma_{\lambda\mu}}{\partial \xi_\rho \partial \xi_\nu} \right) + \cdots \end{aligned}$$

[p. 79] Effectuons la sommation en τ

$$\sum_{\tau} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\tau} \frac{\partial x_\tau}{\partial \xi_\eta} = g_\rho^\eta$$

et celle en η

$$\sum_{\eta} g_\rho^\eta \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\eta} = \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\rho}$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} = \\ &\frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\rho} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\beta} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\rho} \\ &\times \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\lambda\rho}}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\nu} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\rho}}{\partial \xi_\lambda \partial \xi_\nu} - \frac{\partial^2 \gamma_{\lambda\mu}}{\partial \xi_\rho \partial \xi_\nu} \right) + \cdots \end{aligned}$$

Il nous reste à permuter les indices α et γ et à soustraire l'expression ainsi obtenue. Tous les termes non écrits se détruiront. Au lieu de permuter les indices α et γ, on peut permuter les indices sommatoires correspondants λ et μ. Il vient ainsi

$$R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\rho} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\beta} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\rho} \quad P^\rho_{\lambda\mu\nu} \tag{15}$$

où

$$(16) \qquad P^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma_{\lambda\rho}}{\partial\xi_\mu\partial\xi_\nu} - \frac{\partial^2\gamma_{\mu\lambda}}{\partial\xi_\nu\partial\xi_\rho} + \frac{\partial^2\gamma_{\nu\mu}}{\partial\xi_\rho\partial\xi_\lambda} - \frac{\partial^2\gamma_{\rho\nu}}{\partial\xi_\lambda\partial\xi_\mu}\right)$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle expression de $R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}$.

Rappelons la signification des fonctions qui y figurent.

ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont des fonctions des coordonnées définissant un système de coordonnées (1) jouissant de propriétés spéciales (12 et 13) au point *M* où on applique la formule (15). Les dérivées figurant en (16) sont les valeurs en *M* des dérivées des potentiels dans le système (ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4).

[p. 80] Ces équations sont appliquables en un point quelconque *M*. Mais il ne faut pas perdre de vue que les ξ sont des fonctions différentes en chaque point. Il serait, par exemple, inadmissible de dériver les expressions (15).

Supposons que l'on veuille utiliser au lieu du système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) de nouvelles coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) liées aux premières par les équations.

$$x_\sigma = x_\sigma(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \quad (\sigma = 1,2,3,4) \qquad\qquad x'_\sigma = x'_\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (\sigma = 1,2,3,4)$$

En remplaçant les coordonnées x_σ par leurs valeurs en fonction de nouvelles coordonnées dans les fonctions ξ_σ on obtient des fonctions des x'_σ que nous désignerons encore par ξ_σ.

En désignant par un indice les expressions calculées dans le nouveau système on aura

$$R'^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_\lambda\sum_\mu\sum_\nu\sum_\rho \frac{\partial\xi_\lambda}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial\xi_\mu}{\partial x'_\beta}\frac{\partial\xi_\nu}{\partial x'_\gamma}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial\xi_\rho} \quad P^{\rho}_{\lambda\mu\nu}$$

Nous aurons par la règle de dérivation des fractions de fonction.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\xi_\lambda}{\partial x'_\alpha} &= \sum \frac{\partial\xi_\lambda}{\partial x_{\lambda_1}}\frac{\partial x_{\lambda_1}}{\partial x'_\alpha}\\
\frac{\partial\xi_\mu}{\partial x'_\beta} &= \sum \frac{\partial\xi_\mu}{\partial x_{\mu_1}}\frac{\partial x_{\mu_1}}{\partial x'_\beta}\\
\frac{\partial\xi_\nu}{\partial x'_\gamma} &= \sum \frac{\partial\xi_\nu}{\partial x_{\nu_1}}\frac{\partial x_{\nu_1}}{\partial x'_\gamma}\\
\frac{\partial x'_\sigma}{\partial\xi_\rho} &= \sum \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_{\rho_1}}\frac{\partial x_{\rho_1}}{\partial\xi_\rho}
\end{aligned}$$

En posant d'après (15)

$$R^{\rho_1}_{\lambda_1,\mu_1,\nu_1} = \sum_\lambda \sum_\mu \sum_\nu \sum_\rho \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_{\lambda_1}} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_{\mu_1}} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_{\nu_1}} \frac{\partial x_{\rho_1}}{\partial \xi_\rho} \quad P^\rho_{\lambda\mu\nu}$$

[p. 81] il vient finalement

$$(17) \qquad R'^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\lambda_1} \sum_{\mu_1} \sum_{\nu_1} \sum_{\rho_1} \frac{\partial x_{\lambda_1}}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_{\mu_1}}{\partial x'_\beta} \frac{\partial x_{\nu_1}}{\partial x'_\gamma} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_{\rho_1}} R^{\rho_1}_{\lambda_1\mu_1\nu_1}$$

C'est l'équation suivant laquelle se transforme $R^\sigma_{\alpha\beta\gamma}$; lorsqu'on change de système de coordonnées. En particulier lorsqu'on emploie le système ξ_σ d'un point M les équations (15) se réduisent en M à

$$R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} = P^\sigma_{\alpha\beta\gamma}$$

L'expression (16) est l'expression réduite de $R^\sigma_{\alpha\beta\gamma}$. C'est à cela que se réduit $R^\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ en un point M lorsqu'on emploie un système de coordonnées particulier. Cette expression rigoureuse en M pourra être considérée comme approchée dans un domaine suffisamment petit autour de M, car les conditions (12) sur lesquelles elle est basée et qui sont vérifiées exactement en M sont vérifiées avec une approximation donnée dans un domaine suffisamment petit.

Un groupe de quantités qui se transforment lors d'un changement de coordonnées par les équations (17) ou par les équations de la forme générale.

$$(18) \quad T'^{\beta_1\beta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots} = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \cdots \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} \cdots \frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial x'_{\alpha_1}} \frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial x'_{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial x'_{\beta_1}}{\partial x_{\tau_1}} \frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial x_{\tau_1}} \cdots T^{\tau_1\tau_2\cdots}_{\sigma_1\sigma_2\cdots}$$

porte le nom de *tenseur.*

Chaque $T^{\beta_1\beta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots}$ est une composante du tenseur.

Le raisonnement que nous venons de faire pour le tenseur de Riemann $R^\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ s'étend facilement à un tenseur quelconque $T^{\beta_1\beta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots}$. Il en résulte le théorème suivant :

Théorème

S'il est possible de faire correspondre à un point [p. 82] *quelconque un* *système de coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 et des nombres $\Theta^{\tau_1\tau_2\cdots}_{\sigma_1\sigma_2\cdots}$ de telle sorte que les quantités $T^{\beta_1\beta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots}$ soient définies dans un système quelconque x_1, x_2, x_3, x_4 par les équations*

$$(19)\quad T^{\beta_1\beta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots} = \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\cdots\sum_{\tau_1}\sum_{\tau_2}\cdots\frac{\partial\xi_{\sigma_1}}{\partial x_{\alpha_1}}\frac{\partial\xi_{\sigma_2}}{\partial x_{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x_{\beta_1}}{\partial\xi_{\tau_1}}\frac{\partial x_{\beta_2}}{\partial\xi_{\tau_2}}\cdots\Theta^{\tau_1\tau_2\cdots}_{\sigma_1\sigma_2\cdots}$$

$T^{\beta_1\beta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots}$ est un tenseur, c'est-à-dire se transforme lors d'un changement de coordonnées par les équations. (18).

$\Theta^{\tau_1\tau_2\cdots}_{\sigma_1\sigma_2\cdots}$ est la valeur des composantes dans le système (ξ_1 ξ_2 ξ_3 ξ_4).

Naturellement il n'est pas nécessaire qu'il y ait des deux sortes d'indices, supérieurs et inférieurs.

Nous avons rencontré des tenseurs n'ayant que des indices inférieurs, ils sont dits *covariants*. Ce sont les potentiels $g_{\mu\nu}$. Leur caractère tensoriel résulte immédiatement de (7).

Comme tenseur *contrevariant*, c'est-à-dire à indices supérieurs, il faut citer tout d'abord la vitesse propre

$$u^\sigma \equiv \frac{dx_\sigma}{ds} = \sum_\tau \frac{\partial x_\sigma}{\partial\xi_\tau}\left(\frac{d\xi_\tau}{ds}\right)$$

et les potentiels associés $g^{\mu\nu}$ dont le caractère tensoriel résulte de (11).

Il suit immédiatement de la définition (18) du caractère tensoriel que les composantes de deux tenseurs de même espèce peuvent être combinées deux à deux par addition. Les quantités obtenues sont des composantes d'un tenseur de même espèce que les deux premiers.

$$A^{\beta_1\beta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots} + B^{\beta_1\beta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots} = C^{\beta_1\beta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots}$$

En multipliant deux à deux les composantes de deux tenseurs, on obtient les composantes d'un tenseur qu'on **[p. 83]** représente en réunissant sur une même lettre les indices des tenseurs composants.

$$A^{\beta_1\beta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots}\cdot B^{\delta_1\delta_2\cdots}_{\gamma_1\gamma_2\cdots} = C^{\beta_1\beta_2\cdots\delta_1\delta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\gamma_1\gamma_2\cdots}$$

Enfin on peut combiner entre elles les composantes d'un même tenseur en ajoutant entre elles les quatre composantes pour lesquelles un indice inférieur et un indice supérieur prennent ensemble les valeurs *1, 2, 3, 4,* les autres indices gardant même valeur.

On formera ainsi le *tenseur contracté*. Ainsi en contractant $T^{\beta_1\beta_2\cdots}_{\alpha_1\alpha_2\cdots}$ par rapport aux indices α_1 et β_1 on obtient :

$$\sum_\sigma T^{\sigma\beta_2\cdots}_{\sigma\alpha_2\cdots} = T^{\beta_2\cdots}_{\alpha_2\cdots}$$

Le caractère tensoriel du nouveau tenseur s'établit facilement. On aurait en changeant les coordonnées (18)

$$\begin{aligned} T'^{\beta_2\cdots}_{\alpha_2\cdots} &= \sum_\sigma T'^{\sigma\beta_2\cdots}_{\sigma\alpha_2\cdots} \\ &= \sum_\sigma\sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\cdots\sum_{\tau_1}\sum_{\tau_2}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial x'_{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_{\tau_1}}\frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial x_{\tau_2}}\cdots T^{\tau_1\tau_2\cdots}_{\sigma_1\sigma_2\cdots} \end{aligned}$$

Effectuons la sommation en σ

$$\sum_\sigma \frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_{\tau_1}} = \frac{dx_{\sigma_1}}{dx_{\tau_1}} = g^{\sigma_1}_{\tau_1}$$

puis celles en σ_1 et τ_1

$$\sum_{\sigma_1}\sum_{\tau_1} g^{\sigma_1}_{\tau_1} T^{\tau_1\tau_2\cdots}_{\sigma_1\sigma_2\cdots} = \sum_{\sigma_1} T^{\sigma_1\tau_2\cdots}_{\sigma_1\sigma_2\cdots} = T^{\tau_2\cdots}_{\sigma_2\cdots}$$

Il reste finalement

$$T'^{\beta_2\cdots}_{\alpha_2\cdots} = \sum_{\sigma_2}\cdots\sum_{\tau_2}\cdots\frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial x'_{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial x_{\tau_2}}\cdots T^{\tau_2\cdots}_{\sigma_2\cdots}$$

qui est la définition même (18) du caractère tensoriel du tenseur contracté.

* * *

Les deux dernières opérations, multiplication et contraction, s'effectuent souvent simultanément et s'appellent alors *produit intérieur*. Le tenseur g^β_α est ainsi le produit intérieur de $g_{\alpha\beta}$ et $g^{\alpha\beta}$.

[p. 84] On a en effet

$$g^\beta_\alpha = \sum_\sigma g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta}$$

(c'est l'équation par laquelle nous avons défini les $g^{\alpha\beta}$).

* * *

Les tenseurs qu'on obtient en formant le produit intérieur d'un tenseur par l'un ou l'autre des tenseurs fondamentaux $g_{\alpha\beta}$ et $g^{\alpha\beta}$ sont désignés par la même lettre. Il suffit de les distinguer par le nombre et la position des indices. Ces tenseurs sont dits *associés*. En contractant le tenseur de Riemann, on obtient le *tenseur de Riemann contracté*.

$$R_{\alpha\beta} = \sum_\sigma R^\sigma_{\alpha\beta\sigma} \tag{20}$$

Les tenseurs associés seront

$$R^\beta_\alpha = \sum_\sigma g^{\beta\sigma} R_{\alpha\sigma} \tag{20_1}$$

et

$$R^{\alpha\beta} = \sum_\sigma g^{\alpha\sigma} R^\beta_\sigma \tag{20_2}$$

En formant le produit intérieur de ces tenseurs par $g_{\alpha\beta}$ on n'obtient pas de nouveaux tenseurs, on aura

$$\sum_\sigma g_{\alpha\sigma} R^{\beta\sigma} = \sum_\sigma \sum_\tau g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\tau} R^\beta_\tau = R^\beta_\alpha \tag{20_3}$$

car

$$\sum_\sigma g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\tau} = g^\tau_\alpha$$

De même

$$\sum_\sigma g_{\beta\sigma} R^\sigma_\alpha = R_{\alpha\beta} \tag{20_4}$$

En contractant R^β_α on obtient l'invariant

$$R = \sum_\sigma R^\sigma_\sigma \tag{20_5}$$

La définition du caractère tensoriel se réduit en effet dans ce cas à

$$R' = R$$

On peut former au moyen de ce tenseur de nouveaux tenseurs

$$Rg_{\alpha\beta} \quad , \quad Rg^{\alpha\beta}$$

[p. 85] On ne peut les désigner par la même lettre que $R_{\alpha\beta}$, $R^{\alpha\beta}$.

Le calcul tensoriel nous permet ainsi de former des expressions qui se transforment simplement lors d'un changement de coordonnées.

Les nouvelles composantes sont des fonctions linéaires et homogènes des anciennes composantes. Il en résulte que si toutes les composantes d'un tenseur s'annulent dans un système elles s'annulent dans tout autre système.

Si donc une loi physique s'exprime par l'annulation de toutes les composantes d'un tenseur, elle sera valable dans tout système de coordonnées. Nous aurons obtenu conformément au principe de relativité une loi dont l'expression algébrique est indépendante du mode de repérage adopté pour les divers événements.

La méthode introduite par Einstein est donc la suivante : trouver des lois tensorielles qui, lorsqu'on adopte le mode de référence utilisé par les observateurs se confondent avec les lois empiriques qui résument leurs observations avec l'approximation dont leurs mesures est susceptible.

* * *

L'expression réduite du tenseur de Riemann contracté est d'après (15)

$$\begin{aligned} P_{\lambda\mu} = \sum_\rho P^\rho_{\lambda\mu\rho} &= -\frac{1}{2}\sum_\rho \frac{\partial^2 \gamma_{\lambda\mu}}{\partial \xi_\rho^2} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_\mu}\sum_\rho\left(\frac{\partial \gamma_{\lambda\rho}}{\partial \xi_\rho} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{\rho\rho}}{\partial \xi_\lambda}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_\lambda}\sum_\rho\left(\frac{\partial \gamma_{\mu\rho}}{\partial \xi_\rho} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{\rho\rho}}{\partial \xi_\mu}\right) \end{aligned}$$

[p. 86] Il en résulte que le tenseur contracté est symétrique

$$P_{\lambda\mu} = P_{\mu\lambda}$$

et, (20) et (21),

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$$

Le système ξ_σ a été déterminé en s'imposant en un point M les conditions (12). Ces conditions déterminent en (M) la valeur des dérivées premières et secondes $\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\alpha}$ et $\frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ des fonctions ξ_σ de la transformation. (1)

Ne pourrions-nous pas disposer de la valeur en (M) des dérivées troisièmes de ces fonctions de manière à simplifier l'expression réduite de $R_{\alpha\beta}$? Si nous pouvons choisir ces dérivées de manière que, en (M)

(21) $$\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \sum_\rho \left(\frac{\partial \gamma_{\lambda\rho}}{\partial \xi_\rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\rho\rho}}{\partial \xi_\lambda} \right) = 0$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4)$$

l'expression réduite de $R_{\alpha\beta}$ se réduira à son premier terme

(22) $$P_{\lambda\mu} = - \sum_\rho \frac{\partial^2 \gamma_{\lambda\mu}}{\partial \xi_\rho^2}$$

Désignons par $A(\alpha\beta)$ la valeur de (M) de

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \sum_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\rho}}{\partial x_\alpha} \right) = A(\alpha\beta)$$

et calculons ce que devient cette expression lorsqu'on l'exprime au moyen des $\gamma_{\mu\nu}$ et des ξ_σ en s'imposant, en plus des conditions (12) et (13), les relations (21).

Les termes contenant les dérivées secondes des $\gamma_{\mu\nu}$ s'annulent en vertu de (21). Cela résulte immédiatement du calcul des dérivées secondes que nous avons effectué plus haut (14).

[p. 87] Les termes contenant les dérivées premières s'annulent puisque ces dérivées s'annulent (12) et (13).

Il reste à calculer les termes ne contenant pas de dérivées, il faut pour cela calculer $A(\alpha\beta)$ en supposant les $\gamma_{\sigma\tau}$ constants.

Nous aurons en dérivant $g_{\alpha\beta}$ (7), où nous posons d'après (12) $\gamma_{\sigma\tau} = g_\sigma^\tau$,

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = \sum_\sigma \left[\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} + \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\beta} \right]$$

portant cette valeur dans $A(\alpha\beta)$,

$$A(\alpha\beta) = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sum_\sigma \sum_\rho \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\alpha} \dfrac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\rho^2} & + \dfrac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\alpha \partial x_\rho} \dfrac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\rho} \\ -\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\rho} \dfrac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\alpha \partial x_\rho} & - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\alpha \partial x_\rho} \dfrac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\rho} \end{array} \right.$$

et en réduisant les termes semblables

$$A(\alpha\beta) = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sum_\sigma \sum_\rho \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\rho^2}$$

Effectuons la dérivation.

$$A(\alpha\beta) = \sum_\sigma \left[\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sum_\rho \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\rho^2} + \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \sum_\rho \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\rho^2} \right]$$

Est-il possible quelles que soient les valeurs de $A(\alpha\beta)$ et des dérivées $\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\alpha}$ et $\frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$, de déterminer les dérivées troisièmes de manière à satisfaire à cette relation pour (α, $\beta = 1, 2, 3, 4$) ?

Pour ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) elle peut être considérée comme un système linéaire en

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \sum_\rho \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\rho^2}$$

[p. 88] Le déterminant de ce système est différent de zéro. C'est le déterminant fonctionnel des équations de transformation (1). Le système peut donc être résolu. On obtient des équations de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \sum_\rho \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\rho^2} = a(\beta\sigma) \tag{23}$$

où $a(\beta\sigma)$ représentent des fonctions des $A(\alpha\beta)$, $\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\alpha}$, $\frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$.

Les relations (21) pourront toujours être vérifiées si nous pouvons, quels que soient les $a(\beta\sigma)$, déterminer les valeurs en M des dérivées troisièmes de manière à vérifier les équations (23)

On y satisfait en posant

$$\frac{\partial^3 \xi_\sigma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} = \frac{a(\alpha\sigma)a(\beta\sigma)a(\gamma\sigma)}{\Sigma_\rho a(\rho\sigma)^2}$$

Il est donc toujours possible de déterminer le système ξ de telle sorte que l'expression réduite du tenseur Riemann contracté soit donnée par l'expression (22)

$$P_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma_{\lambda\mu}}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\gamma_{\lambda\mu}}{\partial\xi_2^2} + \frac{\partial^2\gamma_{\lambda\mu}}{\partial\xi_3^2} + \frac{\partial^2\gamma_{\lambda\mu}}{\partial\xi_4^2}\right) \tag{24}$$

Nous avons employé un système ξ pour lequel la forme fondamentale se réduit en M à

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2$$

Les coordonnées ξ_σ seront imaginaires.

Nous pouvons les écrire

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x\sqrt{-1} \\ \xi_2 &= y\sqrt{-1} \\ \xi_3 &= z\sqrt{-1} \\ \xi_4 &= t \end{aligned}$$

[p. 89] ds^2 s'écrira alors

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2$$

Les $\gamma_{\lambda\mu}$ se transforment en $g_{\lambda\mu}$ comme les $P_{\lambda\mu}$ en $R_{\lambda\mu}$. Cette transformation ne fait qu'introduire une ou plusieurs fois le facteur constant $\sqrt{-1}$. Ces facteurs se détruisent dans les deux membres de (24).

La forme réduite du tenseur contracté sera donc dans le système (x, y, z, t)

$$R_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial t^2}\right) \tag{25}$$

Chapitre IV. La gravitation

§ 10. Potentiel newtonien et potentiel retardé

Les observations astronomiques sont résumées avec précision par la loi de la gravitation universelle de Newton.

Pour obtenir cette loi, on emploie un mode de repérage particulier : des coordonnées cartésiennes par rapport à trois axes rectangulaires immobiles ou animés d'une translation rectiligne et uniforme, par rapport à l'ensemble des étoiles ; le temps est mesuré par la rotation de la terre par rapport aux étoiles.

L'accélération d'un corps libre peut être attribuée à l'action des divers astres. Elle dépend d'un potentiel, V. C'est-à-dire que les composantes de l'accélération peuvent s'écrire

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

[p. 90] Le potentiel V se calcule alors par l'équation

$$(2) \qquad V = -K\Sigma\frac{m}{r}$$

où m et r désignent respectivement la masse des divers astres et leur distance au point où se calcule le potentiel. K est la constante de l'attraction ; en unités C.G.S.

$$(2') \qquad K = 6,7 \cdot 10^{-8}$$

Ses dimensions sont $L^3\ T^{-2}\ M^{-1}$.

L'équation (2) exprime l'action des masses sur le champ, l'équation (1) traduit la réaction du champ sur les points libres qui y circulent.

Les équations (2) peuvent être écrites sous une autre forme.

Si nous désignons par ρ la densité de la matière en un point ξ, η, ζ, la masse contenue dans un élément de volume $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ situé en ce point sera $\rho\; d\xi\; d\eta\; d\zeta$. La somme de l'équation (2) pourra s'écrire sous forme d'une intégrale triple étendue à tout l'espace. Le potentiel en un point x, y, z à l'instant (t) sera

$$V(x,y,z,t) = -K \int \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta,t)}{r}\; d\xi d\eta d\zeta \tag{3}$$

où r est défini par la relation

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

Inversement on peut exprimer la densité ρ en fonction du potentiel. On obtient alors l'équation bien connue de Poisson.

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi K \rho \tag{4}$$

En un point où il n'y a pas de matière cette équation se réduit à

$$\Delta V = 0 \tag{5}$$

[p. 91] et porte le nom de l'équation de Laplace. ΔV s'appelle le laplacien de V.

Le potentiel newtonien n'est qu'une solution particulière de l'équation de Poisson. On l'obtient en imposant à V des conditions aux limites : lorsqu'on s'éloigne à l'infini dans une direction quelconque, V doit tendre vers une limite indépendante de cette direction. L'accélération d'un point infiniment éloigné de toute masse est alors nulle. Naturellement cette condition ne peut être réalisée que lorsqu'on emploie un système d'axes particulier ou aussi tout système dont le mouvement par rapport à celui-ci est rectiligne et uniforme.

La théorie newtonienne de la gravitation suppose une action immédiate des masses attirantes. Si leur action se propage de proche en proche avec une certaine vitesse c, l'influence de masses, situées à la distance r d'un point (x, y, z), ne s'y fera sentir qu'après un temps r/c. En tenant compte de ce retard, on devra écrire l'équation du potentiel sous la forme

$$V(x,y,z,t) = -K \int \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c})}{r}\; d\xi d\eta d\zeta \tag{6}$$

c'est l'équation du potentiel retardé.

Si on pose

$$\Box V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \tag{7}$$

l'équation de Poisson devient

$$\Box V = 4\pi K \rho \tag{8}$$

$\Box V$ s'appelle le dalembertien de V.

[p. 92] L'équation de Laplace s'écrit maintenant

$$\Box V = 0. \tag{9}$$

Ces formules rendent aussi bien compte de l'expérience que celles de la théorie primitive lorsque la vitesse de propagation c est suffisamment grande ; par exemple, de l'ordre de celle de la lumière.

Lorsque nous choisissons l'unité de temps de telle sorte que la vitesse de propagation soit prise pour unité, le dalembertien s'écrit

$$\Box V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{10}$$

La constante de Gauss K doit alors être divisée par le carré c^2 de la vitesse de propagation dans le système C.G.S.

★ ★ ★

Au moyen des symboles opératoires définis ci-dessus les expressions réduites du tenseur contracté obtenues à la fin du § 9 peuvent s'écrire

$$\Box g_{\mu\nu} = 2R_{\mu\nu} \tag{11}$$

Elles sont valables au voisinage d'un point M où les dérivées premières des $g_{\mu\nu}$ sont nulles et où ds^2 se réduit à

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2$$

On déduira alors comme on déduit (6) de (8)

$$g_{\mu\nu}(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{R_{\mu\nu}(\xi, \eta, \zeta, t-r)}{r}\, d\xi d\eta d\zeta \tag{12}$$

Les potentiels $g_{\mu\nu}$ jouent dans la théorie d'Einstein le rôle du potentiel newtonien V, ainsi que nous nous en sommes rendus compte au § 1. Nous voyons maintenant que $R_{\mu\nu}$ doit représenter les masses matérielles. Il nous faut donc égaler $R_{\mu\nu}$ à **[p. 93]** un tenseur de même nature dépendant de la répartition des masses. Outre $R_{\mu\nu}$, les tenseurs $g_{\mu\nu}$ et $Rg_{\mu\nu}$ (§ 9-20_6) peuvent encore figurer dans la relation cherchée. Si $T_{\mu\nu}$ est un tenseur représentant la matière, nous pourrons essayer de formuler les lois de la gravitation par l'équation générale.

$$T_{\mu\nu} = c_1 R_{\mu\nu} + c_2 R g_{\mu\nu} + c_3 g_{\mu\nu} \tag{13}$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes indéterminées.

Nous chercherons ensuite quelles valeurs il faut donner à ces constantes pour que (13) satisfasse aux conditions que doit vérifier la loi de la gravitation.

Au lieu d'une équation entre tenseurs covariants on peut considérer l'équation équivalente entre les tenseurs associés à ceux-ci.

$$T^{\mu\nu} = c_1 R^{\mu\nu} + c_2 R g^{\mu\nu} + c_3 g^{\mu\nu} \tag{14}$$

§ 11. Le tenseur d'énergie matérielle

L'état de la matière est caractérisé par sa densité et sa vitesse. Ces grandeurs physiques sont-elles des tenseurs ? Nous savons que la vitesse propre

$$u^\sigma = \frac{dx_\sigma}{ds} \tag{1}$$

est un tenseur. La densité, ρ, varie lorsqu'on change de système de coordonnées.

Lorsqu'on se borne à changer les coordonnées d'espace on raisonne de la manière suivante : la masse contenue dans un certain volume doit être indépendante de la manière dont on repère les divers points de ce volume. Comme la densité est le quotient de la masse par le volume qu'elle occupe, le produit **[p. 94]** de la densité par l'élément de volume doit être un invariant.

Nous raisonnerons de même dans le cas général. La masse contenue dans un domaine d'univers doit être indépendante de la manière dont on en repère les divers points ; nous appellerons densité, la masse contenue dans l'unité de volume d'univers.

$$\rho \;\; dx_1 \;\; dx_2 \;\; dx_3 \;\; dx_4 \tag{2}$$

sera donc un invariant.

Lorsqu'on emploie des coordonnées propres de la matière (§ 3) une des coordonnées est l'invariant ds mesuré en suivant la matière dans son mouvement éventuel. Le produit de ρ par les trois autres différentielles des coordonnées sera donc encore un invariant. Les deux définitions de la densité que nous venons d'envisager sont donc des équivalentes.

Nous avons vu en étudiant la géométrie générale comment se transforme l'élément de volume (§ 1-9).

$$\sqrt{\gamma} \;\; dx_1 \;\; dx_2 \;\; dx_3$$

où γ est le déterminant des potentiels est un invariant.

Cette propriété se généralise immédiatement à quatre coordonnées. En tenant compte de ce que le déterminant g des $g_{\mu\nu}$ est négatif, nous obtenons que

$$\sqrt{-g} \;\; dx_1 \;\; dx_2 \;\; dx_3 \;\; dx_4 \tag{3}$$

est un invariant.

Le quotient des deux invariants (2) et (3)

$$\frac{\rho}{\sqrt{-g}}$$

est donc un invariant.

Nous pouvons combiner cet invariant avec le contre **[p. 95]** variant (1) nous formerons ainsi par multiplication un contre-variant de second ordre.

$$T^{\mu\nu} = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{dt} \tag{4}$$

que nous appellerons le tenseur d'énergie matérielle. C'est le tenseur que nous introduirons dans les équations (§ 10-14).

On formera sans difficulté le covariant associé à $T^{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \sum_\sigma \sum_\tau g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} T^{\sigma\tau} \tag{5}$$

L'invariant obtenu par contraction est

$$T = \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}$$

D'après la définition de ds^2 cet invariant se réduit à

$$T = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \tag{6}$$

[p. 96] Nous désignerons sous le nom de densité tensorielles le produit d'un tenseur par $\sqrt{-g}$; nous écrirons les densités tensorielles comme les tenseurs correspondants, mais en employant des lettres italiques.

Nous aurons ainsi

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \tag{7}$$

Il est possible d'écrire les équations du mouvement d'un point libre en fonction du tenseur d'énergie matérielle.

La solution de ce problème sera une première étape dans la recherche des équations générales de la gravitation, car celles-ci doivent rendre compte du mouvement particules libres sous l'influence du champ en même temps que de la production du champ par les masses.

Nous avons vu qu'on pouvait toujours choisir un système de coordonnées de telle sorte qu'en un point M le mouvement des points libres soit rectiligne et uniforme. Il faut pour cela que les dérivées des potentiels s'annulent en ce point. Nous chercherons donc tout d'abord à exprimer au moyen du tenseur matériel à quelle condition le mouvement des points est rectiligne et uniforme, nous obtiendrons ainsi une certaine équation valable dans un système particulier de coordonnées. Il nous suffira, ensuite de trouver une équation tensorielle qui se réduise à cette équation lorsque les dérivées des potentiels sont ~~constantes~~ nulles (1). Cette nouvelle équation sera l'équation du mouvement des points libres dans le cas général.

Considérons une petite masse matérielle en mouvement uniforme la vitesse de tous ses points peut être supposée la même et la densité est constante.

Formons l'expression :

$$\begin{aligned} f^\mu &= \sum_\sigma \frac{\partial T^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} \\ &= \rho \sum_\sigma \frac{\partial(\frac{dx_\mu}{ds})}{\partial x_\sigma} + \frac{dx_\mu}{ds}\sum_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\rho\frac{dx_\sigma}{ds}) \end{aligned} \tag{8}$$

[p. 97] On a

$$\sum_\sigma \frac{\partial(\frac{dx_\mu}{ds})}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds} = \frac{d^2x_\mu}{ds^2}$$

Pour les divers points du mobile on a donc

$$f^\mu = 0$$

puisque l'accélération est nulle et que la densité et la vitesse sont constantes.

Réciproquement si nous posons

$$f^\mu = 0$$

(1) Dans le manuscrit, «constantes» est remplacé par «nulles».

nous pouvons en déduire

$$\begin{aligned}0 &= \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} f^\mu \frac{dx_\nu}{ds} \\ &= \rho \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} \frac{dx_\nu}{ds} + \sum_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (\rho \frac{dx_\sigma}{ds})\end{aligned}$$

car

$$\sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 1$$

En dérivant cette dernière expression on trouve puisque les dérivées des $g_{\mu\nu}$ sont nulles au point M,

$$\sum_\mu \sum_\nu \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} \frac{dx_\nu}{ds} = 0.$$

Les équations

$$f^\mu = 0 \qquad\qquad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

ont donc pour conséquence

$$\sum_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (\rho \frac{dx_\sigma}{ds}) = 0 \tag{9}$$

et

$$\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = 0 \qquad\qquad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

Les dernières équations expriment que le mouvement d'un point est rectiligne et uniforme. C'est bien l'équation du mouvement des points libres, au point M, pour le système de coordonnées que nous avons employé.

La première est l'équation de continuité. Elle exprime la conservation de la masse. Pour nous en rendre compte employons les coordonnées propres du mobile x, y, z, t (§ 3). ds sera alors égal à cdt. Formons au moyen du premier membre de l'équation une intégrale de volume étendue à l'espace occupé par le mobile. Cette intégrale sera nulle et nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \int\int\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{dz}{dt}\right)\right] dxdydz \\ + \frac{1}{c}\frac{d}{dt} \int\int\int \rho \ dx \ dy \ dz = 0\end{aligned}$$

[p. 98] Transformons la première intégrale par la formule de Green. En désignant par dS l'élément de la surface limitant le corps et par l, m, n les cosinus directeur de la normale extérieure à cette surface, nous obtenons.

$$\int\int \rho \left(\ell \frac{dx}{dt} + m\frac{dy}{dt} + n\frac{dz}{dt} \right) dS$$

Cette intégrale représente la quantité de matière qui sort du volume. Elle est nulle puisque nous intégrons sur la surface même du mobile.

Il reste donc

$$\frac{d}{dt}\int\int\int \rho \ dx \ dy \ dz = 0$$

qui exprime que la masse totale du corps reste constante, nous obtiendrons donc les équations tensionnelles (1) qui expriment la conservation de la matière et le mouvement des particules libres en annulant un tenseur f^{μ} qui se réduise [sic] à

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T^{\mu\sigma}}{\partial x_{\sigma}}$$

Lorsque les dérivées des potentiels sont ~~constantes~~ nulles (2).

★ ★ ★

Pour former ce tenseur nous utiliserons le théorème qui nous a déjà servi au § 9 pour établir le caractère tensoriel des divers tenseurs. Nous représenterons de nouveau par $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, le système de coordonnées utilisé au § 9 (3).

Le tenseur d'énergie matérielle se transforme de la manière suivante

$$T^{\alpha\beta} = \sum_{\mu}\sum_{\nu} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \xi_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x_{\nu}} \Theta^{\mu\nu} \tag{10}$$

où $\Theta^{\mu\nu}$ désigne les composantes de ce tenseur dans le système ξ_{σ}.

(1) Il faut lire «tensorielles».
(2) Dans le manuscrit, «constantes» est remplacé par «nulles».
(3) Ajouté.

Inversement on aura

$$\Theta^{\alpha\beta} = \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\nu} T^{\mu\nu} \tag{11}$$

En résolvant ces équations (μ, $\nu = 1, 2, 3, 4$) par rapport aux $T^{\mu\nu}$ on doit retrouver les équations précédentes. Nous utiliserons ce fait dans **[p. 99]** un instant.

Dérivons $\Theta^{\alpha\beta}$ par rapport à x_γ nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta^{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} &= \sum_\rho \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \Theta^{\alpha\beta}}{\partial \xi_\rho} \\
&= \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial^2 \xi_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\gamma} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\nu} T^{\mu\nu} \\
&+ \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial^2 \xi_\beta}{\partial x_\nu \partial x_\gamma} T^{\mu\nu} \\
&+ \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\nu} \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\gamma}
\end{aligned}$$

Au point M nous pouvons calculer les dérivées secondes par la formule (§ 9.9).

$$\frac{\partial^2 \xi_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\gamma} = \sum_\tau \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\tau} \left\{ {\gamma \mu \atop \tau} \right\}$$

Le premier des trois termes de l'équation précédente s'écrit ainsi

$$\sum_\mu \sum_\nu \sum_\tau \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\tau} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\nu} \left\{ {\gamma \mu \atop \tau} \right\} T^{\mu\nu}$$

ou en échangeant les indices sommatoires μ et τ.

$$\sum_\mu \sum_\nu \sum_\tau \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\nu} \left\{ {\gamma \tau \atop \mu} \right\} T^{\tau\nu}$$

le second terme s'écrit de même

$$\sum_\mu \sum_\nu \sum_\tau \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\nu} \left\{ {\gamma \tau \atop \nu} \right\} T^{\mu\tau}$$

On aura ainsi

$$\sum_\rho \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \Theta^{\alpha\beta}}{\partial \xi_\rho} = \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\nu} \times \left(\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\gamma} + \sum_\tau \left\{ {\gamma\ \tau \atop \mu} \right\} T^{\tau\nu} + \sum_\tau \left\{ {\gamma\ \tau \atop \nu} \right\} T^{\mu\tau}\right)$$

Résolvons cette équation par rapport à la quantité entre parenthèse dans le second membre. Le calcul est le même que celui qui permet de passer de l'équation (11) à l'équation (10). Il vient

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} + \sum_\tau \left\{ {\gamma\ \tau \atop \mu} \right\} T^{\tau\nu} + \sum_\tau \left\{ {\gamma\ \tau \atop \nu} \right\} = \sum_\mu \sum_\nu \sum_\rho \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial \xi_\nu}\frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \Theta^{\alpha\beta}}{\partial \xi_\rho}$$

En appliquant le théorème du § 9, nous voyons que le premier membre de cette équation est un tenseur.

Le tenseur contracté correspondant

$$f^\mu = \sum_\sigma \frac{\partial T^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} + \sum_\sigma \sum_\tau \left\{ {\sigma\ \tau \atop \mu} \right\} T^{\tau\sigma} + \sum_\sigma \sum_\tau \left\{ {\sigma\ \tau \atop \sigma} \right\} T^{\mu\tau}$$

peut se simplifier si on remarque que (§ 5-12)

$$\sum_\sigma \left\{ {\sigma\ \tau \atop \sigma} \right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_\tau} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\tau}$$

il vient ainsi **[p. 100]**

$$f^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}(T^{\mu\sigma}\sqrt{-g}) + \sum_\sigma \sum_\tau \left\{ {\sigma\ \tau \atop \mu} \right\} T^{\tau\sigma}$$

La densité tensionelle (1) correspondante sera

$$f^\mu = \sum_\sigma \frac{\partial T^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} + \sum_\sigma \sum_\tau \left\{ {\sigma\ \tau \atop \mu} \right\} T^{\tau\sigma} \tag{11}$$

Le second membre se réduit à son premier terme lorsque les dérivées des potentiels sont nulles, car les symboles de Christoffel s'annulent dans ce cas.

(1) Il faut lire «tensorielle».

Nous pouvons donc conclure que les équations tensorielles

$$f^{\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{12}$$

expriment en fonction du tenseur d'énergie matérielle, les équations du mouvement des points libres et le principe de conservation de la matière.

REMARQUE. Dans la démonstration du caractère tensoriel de f^{μ} nous n'avons pas fait usage de la symétrie de $\mathcal{T}^{\mu\nu}$.

Cette démonstration subsiste encore pour une densité tensorielle pour laquelle

$$\mathcal{T}^{\sigma\tau} = -\mathcal{T}^{\tau\sigma}$$

le tenseur f^{μ} se réduit dans ce cas à son premier terme

$$f^{\mu} = \sum_{\sigma} \frac{\partial \mathcal{T}^{\mu\sigma}}{\partial x_{\sigma}} \tag{13}$$

§ 12. Équations générales de la mécanique et de la gravitation

[p. 101] Nous avons vu à la fin du § 10 que les équations du champ de gravitation peuvent être mises sous la forme générale (§ 10 & 12)

$$T_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 R g_{\mu\nu} + C_3 g_{\mu\nu} \tag{1}$$

ou sous la forme contrevariante équivalente (§ 10-12).

Nous nous proposons maintenant de déterminer les constantes encore arbitraires c_1, c_2, c_3 de telle sorte que les équations

$$f^\alpha = 0 \qquad\qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

qui expriment en fonction de $T^{\mu\nu}$ les équations de la dynamique des points libres soient des conséquences de l'équation (1).

Puisque les équations (1) & (1) sont des équations tensorielles il suffira de faire cette démonstration en un point quelconque M en employant un système de coordonnées particulier au moyen duquel la démonstration soit plus facile.

Nous emploierons le système que nous avons utilisé du § 9, et que nous avons désigné par ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. Il sera plus commode ici de le désigner par x_1, x_2, x_3, x_4. Avec les notations actuelles les conditions s'écrivent (§ 9-12 et 13) :

$$g_{\alpha\beta} = g_\alpha^\beta \quad , \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = 0 \tag{3}$$

et

$$g^{\alpha\beta} = g_\alpha^\beta \quad , \quad \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = 0 \tag{4}$$

Nous avons montré qu'il était toujours possible de se les imposer en un point M.

On en déduit, que en M,

$$\sqrt{-g} = 1$$

et que les symboles de Christoffel s'annulent.

[p. 102] Le tenseur f^α se réduit à

$$f^\alpha = \sum_\tau \frac{\partial T^{\alpha\tau}}{\partial x_\tau}$$

ou encore en employant le tenseur covariant associé à $T^{\alpha\beta}$ (§ 11-5)

$$f^\alpha = \sum_\tau \frac{\partial T_{\alpha\tau}}{\partial x_\tau}$$

à cause de (3).

En remplaçant $T_{\alpha\tau}$ par sa valeur (1) nous devons avoir

$$C_1 \sum_\tau \frac{\partial R_{\alpha\tau}}{\partial x_\tau} + C_2 \sum_\tau \frac{\partial (R g_{\alpha\tau})}{\partial x_\tau} + C_3 \sum_\tau \frac{\partial g_{\alpha\tau}}{\partial x_\tau} = 0$$

Le dernier terme s'annule (3). Le second se transforme de la manière suivante

$$\sum_\tau \frac{\partial (R g_{\alpha\tau})}{\partial x_\tau} = \sum_\tau g_{\alpha\tau} \frac{\partial R}{\partial x_\tau} = \frac{\partial R}{\partial x_\alpha}$$

et peut encore s'écrire par suite de la définition de l'invariant

$$R = \sum_\sigma \sum_\tau g^{\sigma\tau} R_{\sigma\tau} \quad ,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_\alpha} = \sum_\sigma \sum_\tau \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (g^{\sigma\tau} R_{\sigma\tau}) = \sum_\tau \frac{\partial R_{\tau\tau}}{\partial x_\alpha}$$

Il s'agit donc de choisir les constantes c_1 et c_2 de telle sorte que

(6) $$C_1 \sum_\tau \frac{\partial R_{\alpha\tau}}{\partial x_\tau} + C_2 \sum_\tau \frac{\partial R_{\tau\tau}}{\partial x_\alpha} = 0$$

Rappelons la définition du tenseur de Riemann contracté (§ 9-20 et 5)

(7) $$\begin{aligned} R_{\lambda\mu} &= \sum_\sigma \left[-\frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ {\lambda\ \mu \atop \sigma} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ {\lambda\ \sigma \atop \sigma} \right\} \right] \\ &+ \sum_\sigma \sum_\tau \left[\left\{ {\lambda\ \sigma \atop \tau} \right\} \left\{ {\mu\ \tau \atop \sigma} \right\} - \left\{ {\lambda\ \mu \atop \sigma} \right\} \left\{ {\sigma\ \tau \atop \tau} \right\} \right] \end{aligned}$$

et celle du symbole de Christoffel

(8) $$\left\{ {\lambda\ \mu \atop \nu} \right\} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\sigma\nu} \left(\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x_\sigma} \right)$$

Calculons à quoi se réduit en M l'expression

$$\frac{\partial R_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}$$

lorsqu'on emploie les coordonnées particulières définies plus haut.

Les termes provenant de la dérivation des produits de symboles de Christoffel (2° ligne de 7) s'annulent avec ses symboles.

Les autres sont formés au moyen des dérivées secondes des symboles de Christoffel.

Ces dérivées se réduisent (8) et (5 et 4) à

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 g_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^3 g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda \partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial^3 g_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)$$

[p. 103] Dans chaque dérivée figurent les cinq indices $\alpha\ \beta\ \lambda\ \mu\ \nu$. Nous pouvons caractériser chaque dérivée par les deux indices du potentiel et écrire en abrégé

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial^3 g_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha \partial x_\beta} = (\lambda\nu)$$

Nous aurons ainsi

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left\{ {\lambda\ \mu \atop \nu} \right\} = (\lambda\nu) + (\mu\nu) - (\lambda\mu)$$

les cinq indices étant ($\alpha\ \beta\ \lambda\ \mu\ \nu$).

Avec cette notation

$$\frac{\partial R_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = \sum_\sigma \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\sigma}\left\{ {\lambda\ \mu \atop \sigma} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu}\left\{ {\lambda\ \sigma \atop \sigma} \right\}\right]$$

s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = & - \ (\lambda\sigma) - (\mu\sigma) + (\lambda\mu) \\ & + \ (\lambda\sigma) + (\sigma\sigma) - (\lambda\sigma)\end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial R_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = -(\lambda\sigma) - (\mu\sigma) + (\lambda\mu) + (\sigma\sigma)$$

Les cinq indices sont

$$\lambda\ \mu\ \nu\ \sigma\ \sigma$$

Il faut sommer par rapport à σ.

Nous avons à calculer les deux expressions qui figurent dans (6)

$$\sum_\tau \frac{\partial R_{\alpha\tau}}{\partial x_\tau} \quad , \quad \sum_\tau \frac{\partial R_{\tau\tau}}{\partial x_\alpha}$$

Nous obtiendrons la première en posant dans (9)

$$\lambda = \alpha \quad , \quad \mu = \nu = \tau$$

et en sommant par rapport à τ.

$$\sum_\tau \frac{\partial R_{\alpha\tau}}{\partial x_\tau} = -(\alpha\sigma) - (\tau\sigma) + (\alpha\tau) + (\sigma\sigma)$$

Les cinq indices sont $\alpha\ \sigma\ \sigma\ \tau\ \tau$. On peut échanger les deux indices sommatoires σ et τ.

$$(\alpha\sigma) = (\alpha\tau)$$

En réduisant les termes semblables, il reste donc

$$\sum_\tau \frac{\partial R_{\alpha\tau}}{\partial x_\tau} = -(\tau\sigma) + (\sigma\sigma) \tag{10}$$

La seconde expression se calcule en posant dans (9).

$$\nu = \alpha \qquad\qquad \lambda = \mu = \tau$$

et en sommant par rapport à τ.

$$\sum_\tau \frac{\partial R_{\tau\tau}}{\partial x_\alpha} = -(\tau\sigma) - (\tau\sigma) + (\tau\tau) + (\sigma\sigma)$$

[p. 104] Les cinq indices sont encore $\alpha\ \sigma\ \sigma\ \tau\ \tau$. On a

$$(\sigma\sigma) = (\tau\tau)$$

et par conséquent

$$\sum_{\tau} \frac{\partial R_{\tau\tau}}{\partial x_\alpha} = -2(\tau\sigma) + 2(\sigma\sigma) \tag{11}$$

L'équation s'écrit donc (10 et 11)

$$C_1 \sum_{\tau} \frac{\partial R_{\alpha\tau}}{\partial x_\tau} + C_2 \sum_{\tau} \frac{\partial R_{\tau\tau}}{\partial x_\alpha} = (C_1 + 2C_2)\left[-(\tau\sigma) + (\sigma\sigma)\right] = 0$$

On y satisfait identiquement en posant

$$C_1 + 2C_2 = 0 \tag{12}$$

Moyennant cette condition les équations (2) sont une conséquence de l'équation (1) lorsqu'on emploie le système particulier que nous avons utilisé dans la démonstration. Il en sera encore de même lorsqu'on emploie un système de coordonnées quelconque. Car lorsque toutes les composantes d'un tenseur s'annulent en un point dans un système de coordonnées les composantes du tenseur s'annulent encore en ce point lorsqu'on emploie un système quelconque de coordonnées.

Les équations de la gravitation doivent donc être de la forme

$$T_{\mu\nu} = C_1(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) + C_3 g_{\mu\nu}$$

On peut résoudre ces équations par rapport à $R_{\mu\nu}$.

On a en effet en observant *qui*

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \sum_{\mu} g_{\mu}^{\mu} = 4 \;,$$

$$T = \sum_{\mu}\sum_{\nu} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = C_1(R - 2R) + 4C_3 = -C_1 R + 4C_3$$

On entre *qui*

$$R_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) + \lambda g_{\mu\nu} \;, \tag{13}$$

en posant

$$\kappa = -\frac{1}{C_1} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{C_3}{C_1}$$

C'est sous cette forme que l'on écrit habituellement les équations générales de la gravitation. On en déduit comme nous l'avons vu les équations générales de la dynamique.

$$f^\mu \equiv \sum_\sigma \frac{\partial \mathcal{T}^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} + \sum_\sigma \sum_\tau \left\{ {\sigma \; \tau \atop \mu} \right\} \mathcal{T}^{\sigma\tau} = 0 \tag{14}$$

[p. 105] Nous allons étudier dans le paragraphe 13 les conséquences des équations de la gravitation lorsqu'on y pose $\lambda = 0$.

Nous verrons ensuite quelles modifications s'introduisent lorsque cette constante n'est pas nulle.

§ 13. Applications astronomiques

[p. 106] Il est toujours possible de choisir un système de coordonnées tel qu'en un point M, ds^2 se réduise à

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2 \tag{1}$$

les dérivées des $g_{\mu\nu}$ soient nulles, et les dalembertiens des $g_{\mu\nu}$ se réduisent à

$$\Box\, g_{\mu\nu} = 2R_{\mu\nu} \tag{2}$$

Ces conditions peuvent toujours être réalisées, avec une certaine approximation dans un domaine.

Lorsqu'on les suppose réalisées dans l'ensemble du système solaire on obtient une approximation qui correspond à celle de la mécanique classique.

En recherchant une seconde approximation on parvient à expliquer sans hypothèse particulière le mouvement du périhélie de Mercure dont la théorie classique ne rendait pas compte.

L'équation (1) exprime que la géométrie est euclidienne et que les coordonnées x, y, z peuvent être considérées comme des coordonnées cartésiennes par rapport à trois axes rectangulaires. Le temps t est le temps marqué par un chronomètre immobile, il sera mesuré par exemple par la rotation de la terre par rapport aux étoiles. L'unité de temps est choisie de telle sorte que l'unité de vitesse soit la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. C'est le temps nécessaire à la lumière pour parcourir l'unité de longueur.

Les dérivées des $g_{\mu\nu}$ sont nulles approximativement. Plus elles sont petites plus grand est le domaine où l'équation (1) et les conséquences qui s'en déduisent sont acceptables.

Nous admettrons que l'équation (1) ainsi que l'annulation des dérivées des $g_{\mu\nu}$ sont vérifiées exactement, à la limite, lorsqu'on s'éloigne indéfiniment de toute masse.

[p. 107] Les équations (2) se calculent par la formule (§ 10-12)

$$g_{\mu\nu}(x,y,z,t) = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{R_{\mu\nu}(\xi,\eta,\zeta,t-r)}{r}\, d\xi d\eta d\zeta$$

ou en tenant compte des équations de la gravitation

$$R_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \tag{3}$$

$$g_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2\pi}\int \frac{T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T}{r} \ d\xi d\eta d\zeta \tag{4}$$

On pourra généralement négliger le retard dans le calcul des potentiels, la vitesse des astres étant petite par rapport à la vitesse-unité (vitesse de la lumière).

Rappelons la définition de $T_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \sum_{\sigma}\sum_{\tau} g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}T^{\sigma\tau} \\ &= \frac{\rho}{\sqrt{-g}}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}\frac{\partial x_\sigma}{ds}\frac{dx_\tau}{ds} \end{aligned}$$

Les vitesses des astres étant petites, nous pourrons poser

$$\frac{dx_1}{ds} = \nu_x, \ \frac{dx_2}{ds} = \nu_y, \ \frac{dx_3}{ds} = \nu_z, \ \frac{dx_4}{ds} = \sqrt{1-\nu^2}$$

En particulier lorsque les vitesses v_x, v_y, v_z des astres sont nulles ou négligeables, $T_{\mu\nu}$ se réduit à

$$T_{\mu\nu} = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \ g_{\mu 4}g_{\nu 4}$$

Si κ est une quantité petite, et nous verrons de suite qu'il en est bien ainsi, nous pouvons dans la résolution des équations (4) remplacer sous le signe intégrale $g_{\mu\nu}$ par les valeurs approchées tirées de (1) que nous appelons $\delta_{\mu\nu}$

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Tous les $T_{\mu\nu}$ sont alors nuls sauf

$$T_{44} = \rho$$

L'invariant T est égal à

$$T = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \cong \rho$$

En posant

$$\varpi = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} d\xi d\eta d\zeta \tag{5}$$

les équations (4) ont pour solution

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + g_\mu^\nu \varpi \tag{6}$$

où g_μ^ν désigne toujours

$$g_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{si} \quad \mu \neq \nu \end{cases}$$

Le déterminant des $g_{\mu\nu}$ s'écrira ainsi

$$g = \begin{vmatrix} -1+\varpi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\varpi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\varpi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\varpi \end{vmatrix} \cong -1 + 2\varpi$$

[p. 108] Les $g^{\mu\nu}$ sont égaux aux mineurs des éléments correspondants de ce déterminant, divisés par la valeur du déterminant. Ils sont donnés par le tableau $(\frac{1}{g} \cong -1 - 2\varpi)$.

$$\begin{array}{cccccc} g^{\mu\nu} & = & -1-\varpi & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1-\varpi & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & -1-\varpi & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1-\varpi \end{array}$$

c'est-à-dire

$$g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - g_\mu^\nu \varpi \tag{7}$$

Enfin

$$\sqrt{-g} = 1 - \varpi \tag{8}$$

Les équations du mouvement d'un point libre se calculeront par l'équation (§ 5-15), (i = 1, 2, 3)

$$\frac{d^2x_i}{dx_4^2} + \sum_\mu \sum_\nu \left[\left\{ {\mu \nu \atop i} \right\} - \left\{ {\mu \nu \atop 4} \right\} \frac{dx_i}{dx_\nu} \right] \frac{dx_\mu}{dx_4} \frac{dx_\nu}{dx_4} = 0 \tag{9}$$

où il faudra remplacer les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 respectivement par x, y, z, t.

Les symboles de Christoffel se calculent par les formules (§ 5-13)

$$\begin{aligned} \left\{ {\sigma\sigma \atop \tau} \right\} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{\tau\tau}}\frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\tau} \cong -\frac{1}{2}\delta_{\tau\tau}\frac{\partial \varpi}{\partial x_\tau} \quad (\sigma \neq \tau) \\ \left\{ {\sigma\tau \atop \sigma} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{\sigma\sigma}}\frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\tau} \cong \frac{1}{2}\delta_{\sigma\sigma}\frac{\partial \varpi}{\partial x_\tau} \end{aligned} \tag{10}$$

Les équations du mouvement sera ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}(1 - 3v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\frac{\partial \varpi}{\partial x} \\ &-v_x v_y \frac{\partial \varpi}{\partial y} - v_x v_z \frac{\partial \varpi}{\partial z} - \frac{1}{2} v_x \frac{\partial \varpi}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

et les équations analogues.

Telles sont les équations approchées du mouvement, lorsque les masses produisant le champ sont immobiles et qu'on adopte l'approximation indiquée au début de ce paragraphe.

L'accélération est fonction de la vitesse du mobile. Cette vitesse est écrite en prenant la vitesse de la lumière comme unité, elle est très petite. Le terme principal est donc bien le terme indépendant des vitesses.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial \varpi}{\partial x} = 0$$

[p. 109] ϖ est proportionnel au potentiel newtonien. Cette équation est équivalente à l'équation (§ 10-1). ϖ doit être le double du potentiel newtonien. Il faut pour cela choisir la constante κ de telle sorte que

$$\frac{\kappa}{4\pi} = 2\frac{K}{C^2}$$

étant la valeur de la constante de l'attraction (§ 10 et 2) lorsqu'on choisit l'unité de temps comme nous l'avons fait ici.

Nous aurons ainsi

$$\kappa = \frac{8\pi K}{C^2} = 1,87 \cdot 10^{-27} \tag{12}$$

qui est bien une quantité petite.

Pour trouver les équations du mouvement en unités C.G.S. il suffit de multiplier les équations du mouvement par c^2.

La formule (11) est une formule approchée. Pour obtenir une meilleure approximation, nous pouvons nous contenter de l'approximation déjà obtenue pour tous les termes de (9) contenant les quantités petites v_x, v_y, v_z, le seul dont nous devons obtenir une valeur plus approchée est donc

$$\left\{ {4\ 4 \atop i} \right\} = \sum_\sigma g^{i\sigma} \left[{4\ 4 \atop \sigma} \right] \cong (1+\varpi)\left(-\frac{\partial g_{4i}}{\partial x_4} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i} \right)$$

$\frac{\partial g_{4i}}{\partial x_4}$ est nulle en première approximation puisque g_{4i} s'annule en première approximation. Les variations des potentiels avec le temps doivent être petites puisque les vitesses des astres peuvent être supposées petites. Si nous envisageons le cas ordinaire d'un champ quasi stationnaire, nous pourrions dans le calcul de l'approximation actuelle négliger les dérivées des potentiels par rapport au temps. Il nous reste donc à trouver une meilleure approximation de $\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i}$ en négligeant les dérivées par rapport à κ_4. Rappelons la définition de R_{44}.

$$\begin{aligned} R_{44} &= \sum_\sigma \left[-\frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ {4\ 4 \atop \sigma} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_4} \left\{ {4\ \sigma \atop \tau} \right\} \right] \\ &+ \sum_\sigma \sum_\tau \left[\left\{ {4\ \sigma \atop \tau} \right\} \left\{ {4\ \tau \atop \sigma} \right\} - \left\{ {\sigma\ \tau \atop \sigma} \right\} \left\{ {4\ 4 \atop \tau} \right\} \right] \end{aligned}$$

[p. 110] Le second terme est nul si nous supposons que les dérivées par rapport à x_4 s'annulent.

Calculons les autres en considérant ϖ comme une quantité petite du premier ordre et en négligeant les termes d'ordre supérieur au second.

Nous aurons

$$\frac{\partial}{\partial x_4} = 0$$

$$\left\{ {4\ 4 \atop \sigma} \right\} = -\frac{1}{2}\sum_{\tau} g^{\sigma\tau}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau}$$

et, par conséquent

$$-\sum_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left\{ {4\ 4 \atop \sigma} \right\} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} g^{\sigma\tau}\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} + \frac{1}{2}\sum_{\sigma}\sum_{\tau}\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma}$$

Nous aurons en première approximation

$$\begin{aligned} g^{\sigma\tau} &= -g^{\tau}_{\sigma}(1+\varpi) \qquad (\sigma,\tau \neq 4) \\ g^{44} &= 1+\varpi \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire

$$-\sum_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left\{ {4\ 4 \atop \sigma} \right\} = -\frac{1}{2}(1+\varpi)\sum_{\sigma}\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_\sigma^2} - \frac{1}{2}\sum_{\sigma}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_\sigma}\right)^2$$

Pour calculer les termes de la seconde ligne du développement de R_{44} nous avons à remplacer les ~~symboles de Christoffel par leur valeur en première approximation.~~

~~Remarquons que les sont nuls sauf~~

~~et~~

~~Il vient alors~~

~~D'autre part ( )~~

~~il vient donc~~

~~On obtient donc finalement~~

~~Résolvons cette équation par rapport à~~

~~Nous aurons à l'approximation actuelle~~

~~Et en remplaçant par sa valeur~~

[p. 111] symboles de Christoffel par leurs valeurs en première approximation (10). Remarquons que les $\left\{ {4\ \sigma \atop \tau} \right\}$ sont nuls sauf

$$\left\{ {4\ 4 \atop \tau} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \varpi}{\partial x_\tau} \qquad\qquad (\tau \neq 4)$$

et

$$\left\{ {4\ \sigma \atop 4} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \varpi}{\partial x_\sigma} \qquad\qquad (\sigma \neq 4)$$

Il vient alors

$$\sum_\sigma \sum_\tau \left\{ {4\ \sigma \atop \tau} \right\}\left\{ {4\ \tau \atop \sigma} \right\} = \frac{1}{2}\sum_\sigma \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_\sigma}\right)^2$$

D'autre part (§ 5-12)

$$\sum_\sigma \left\{ {\sigma\ \tau \atop \sigma} \right\} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\tau} = -\frac{\partial \varpi}{\partial x_\tau}\ ;$$

il vient donc

$$-\sum_\sigma \sum_\tau \left\{ {\sigma\ \tau \atop \sigma} \right\}\left\{ {4\ 4 \atop \tau} \right\} = -\frac{1}{2}\sum_\sigma \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_\sigma}\right)^2$$

On obtient donc finalement

$$R_{44} = -\frac{1}{2}(1+\varpi)\sum_\sigma \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial {x_\sigma}^2} - \frac{1}{2}\sum_\sigma \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_\sigma}\right)^2$$

Résolvons cette équation par rapport à

$$\sum_\sigma \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial {x_\sigma}^2} = \Box\, g_{44}$$

Nous aurons à l'approximation actuelle

$$\Box\, g_{44} = -2(1+\varpi)R_{44} + \sum_\sigma \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_\sigma}\right)^2$$

Et, en remplaçant R_{44} par sa valeur

$$R_{44} = \kappa(T_{44} - \frac{1}{2}T) = -\frac{1}{2}\kappa\rho$$

on trouve finalement

$$\Box\, g_{44} = -\kappa(1-\varpi)\rho + \sum_\sigma \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_\sigma}\right)^2$$

On obtiendra donc g_{44} sous la forme

$$g_{44} = 1 + \varpi$$

en remplaçant dans le calcul de ϖ (5) la densité ρ par une densité fictive

$$\rho' = (1 - \varpi)\rho - \frac{1}{\kappa} \sum_{\sigma} \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_{\sigma}} \right)^2$$

En désignant par V le potentiel newtonien en unités C.G.S. et par g l'accélération correspondante

$$g^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \quad ,$$

[p. 112] Cette expression peut s'écrire

$$\rho' = \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) \rho^2 - \frac{1}{\kappa c^4} g^2$$

La constante

$$\frac{1}{\kappa c^4} = 0,66 \cdot 10^{-15}$$

Le terme en g^2 est le seul terme que nous ayons rencontré jusqu'à présent où apparaisse le caractère non homogène des équations de la gravitation. Le fait que ces équations ne sont pas homogènes a pour conséquence que l'accélération d'un mobile dans le champ de plusieurs masses n'est pas exactement la résultante des accélérations que lui communiquerait chacune des masses si elle agissait seule. La différence est très faible mais elle pourrait se faire sentir dans certains phénomènes, tels le mouvement du périhélie des planètes.

Nous avons ainsi trouvé les équations du mouvement des astres avec une approximation amplement suffisante pour les applications astronomiques. Ce sont l'équation (11) et les équations analogues où on doit calculer ϖ en employant la densité fictive ρ' au lieu de la densité réelle ρ.

⋆ ⋆ ⋆

Nous avons effectué ce calcul en supposant négligeable l'influence de la vitesse et de la rotation des masses attirantes. Il est facile de tenir compte de cette influence. <u>Le tenseur $T_{\mu\nu}$ peut s'écrire</u>

$$
\begin{array}{rlllll}
T_{\mu\nu} & = & \rho v_x^2 & , \; \rho v_x v_y & , \; \rho v_x v_z & , \; \rho v_x \\
& & \rho v_y v_x & , \; \rho v_y^2 & , \; \rho v_y v_z & , \; \rho v_y \\
& & \rho v_z v_x & , \; \rho v_z v_y & , \; \rho v_z^2 & , \; \rho v_z \\
& & \rho v_x & , \; \rho v_y & , \; \rho v_z & , \; \rho(1-v^2)
\end{array}
$$

On peut calculer séparément l'intégrale (4) pour chaque astre. Si nous désignons par v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} la vitesse du centre de gravité de l'astre et par ω_x, ω_y, ω_z sa rotation nous pourrons écrire **[p. 113]**

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_{0x} + z\omega_y - y\omega_z \\
v_y &= v_{0y} + x\omega_z - z\omega_x \\
v_z &= v_{0z} + y\omega_x - x\omega_y
\end{aligned}
$$

où x, y, z sont les coordonnées des points par rapport à des axes passant par le centre de gravité.

Désignons par $d\Pi$ l'élément de volume. On aura

$$
\int \rho v_x^2 d\Pi = M v_{0x}^2 + \frac{I}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2)
$$

où M est la masse de l'astre et I son moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité. (Nous supposons que l'astre a une symétrie sphérique).

Nous aurons de même

$$
\int \rho v_x v_y d\Pi = M v_{ox} v_{oy} - \frac{I}{2}\omega_x\omega_y
$$

Les valeurs de

$$
\int T_{\mu\nu} d\Pi
$$

sont alors données pour chaque astre par le tableau suivant (nous avons supprimé les indices zéro des vitesses)

$$
\begin{array}{llll}
Mv_x^2 + \frac{I}{2}(\omega_y^2+\omega_z^2) & , \; Mv_y v_x - \frac{I}{2}\omega_y\omega_x & , \; Mv_z v_x - \frac{I}{2}\omega_z\omega_x & , \; Mv_x \\
Mv_x v_y - \frac{I}{2}\omega_x\omega_y & , \; Mv_y^2 + \frac{I}{2}(\omega_x^2+\omega_z^2) & , \; Mv_z v_y - \frac{I}{2}\omega_z\omega_y & , \; Mv_y \\
Mv_x v_z - \frac{I}{2}\omega_x\omega_z & , \; Mv_y v_z - \frac{I}{2}\omega_y\omega_z & , \; Mv_z^2 + \frac{I}{2}(\omega_x^2+\omega_y^2) & , \; Mv_z \\
Mv_x & , \; Mv_y & , \; Mv_z & , \; M(1-v^2) - I\omega^2
\end{array}
$$

On aura ainsi par exemple

$$\begin{aligned} g_{11} &= -1+\varpi+\frac{\kappa}{2\pi}\sum\frac{Mv_x^2+\frac{I}{2}(\omega_y^2+\omega_z^2)}{r} \\ g_{12} &= \frac{\kappa}{2\pi}\sum\frac{Mv_xv_y-\frac{I}{2}\omega_x\omega_y}{r} \\ g_{14} &= \frac{\kappa}{2\pi}\sum\frac{Mv_x}{r} \\ g_{44} &= 1+\varpi-\frac{\kappa}{2\pi}\sum\frac{Mv^2+I\omega^2}{r} \end{aligned}$$

On formerait les autres expressions analogues par permutation des indices x, y, z.

Conséquences géométriques

[p. 114] Si nous nous en tenons au cas où nous pouvons négliger l'influence de la vitesse des masses attirantes, la forme fondamentale s'écrit

$$ds^2 = (-1+\varpi)(dx^2+dy^2+dz^2)+(1+\varpi)dt^2$$

La géométrie correspondante est caractérisée par l'élément de distance

$$d\sigma^2 = (1-\varpi)(dx^2+dy^2+dz^2)$$

On voit que la géométrie n'est pas euclidienne.

★ ★ ★

On peut faire la carte de l'espace dans un espace euclidien. En considérant x, y, z comme les coordonnées cartésiennes de l'espace euclidien dans lequel on fait la carte, on voit que l'échelle est indépendante de la direction des longueurs et égale à

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varpi}} \cong 1+\frac{1}{2}\varpi$$

ou, d'après la signification de $\varpi = \frac{2V}{c^2}$,

$$1+\frac{V}{c^2}$$

où V est le potentiel newtonien en unités C.G.S.

On peut interpréter ce résultat, en disant que la géométrie est euclidienne mais que les mètres subissent une déformation proportionnelle à

$$\sqrt{1-\varpi} \cong 1 - \frac{V}{c^2}$$

Naturellement, on pourrait faire d'autres interprétations en se servant, non d'une carte conforme comme nous l'avons fait ici, mais de tout autre carte.

Ainsi dans le cas où il n'y a qu'une seule masse attirante,

$$\varpi = -2K\frac{m}{r}$$

[p. 115] on aura en utilisant des coordonnées polaires

$$d\sigma^2 = \left(1 + \frac{2Km}{r}\right)\left[dr^2 + r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)\right]$$

Faisons le changement de coordonnées

$$\rho^2 = r^2\left(1 + \frac{2Km}{r}\right)$$

d'où on tire

$$\rho d\rho = r\left(1 + \frac{Km}{r}\right)dr$$

et

$$\left(1 + \frac{2Km}{r}\right)dr^2 \;\cong\; \frac{\rho^2}{r^2}d\rho^2 \;\cong\; \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2Km}{\rho}}$$

il vient

$$d\sigma^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2Km}{\rho}} + \rho^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)$$

On voit que ρ est alors l'élément de longueur dans une direction normale au rayon vecteur.

* * *

On peut dire que la géométrie est euclidienne mais que les mètres subissent une dilatation suivant le rayon vecteur proportionnellement à

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2Km}{\rho}}}$$

Dans le cas d'une masse unique au repos, Schwarzschild a trouvé la valeur exacte de ds^2

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1+\varpi} - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) + (1+\varpi)dt^2$$
$$\varpi = -2\frac{K}{c^2}\frac{m}{r}$$

Si nous supposons que la masse s'éloigne indéfiniment suivant l'axe des x négatifs, nous obtenons à la limite, r et m tendant vers l'infini,

$$ds^2 = -\frac{dx^2}{1+\varpi} - dy^2 - dz^2 + (1+\varpi)dt^2$$
$$\varpi = \frac{2gx}{c^2} \quad , \quad g = \lim \frac{Km}{r^2}$$

C'est la forme que nous avons trouvée (§ 7-9) en étudiant le champ de gravitation artificiel obtenu par un mouvement uniformément accéléré. Nous voyons que ce champ est rigoureusement équivalent au champ produit par une masse infinie, infiniment éloignée.

Pesanteur des rayons lumineux

[p. 116] Les rayons lumineux sont des géodésiques qui annulent ds.

On voit que leur vitesse, indépendante de la direction, varie d'un point à l'autre et est égale à

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{1+\varpi} \cong 1 + \frac{K}{c^2}V$$

Il en résulte que les rayons lumineux ne se propagent pas en ligne droite. Comparons l'accélération subie suivant l'axe des x par un rayon lumineux de vitesse

$$v_x = 0 \quad , \quad v_y = 1 \quad , \quad v_z = 0$$

à celle qui subit au même point une masse matérielle au repos.

La formule (11) donne pour le rayon

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial \varpi}{\partial x} = 0$$

et pour la masse

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial \varpi}{\partial x} = 0$$

L'accélération du rayon lumineux normalement à sa direction de propagation est donc le double de celle que subirait une masse en repos au même point. On sait que les observations faites durant l'éclipse du 29 mai 1919 confirment ces conclusions.

Déplacement vers le rouge des raies du spectre solaire

Le temps propre sur les différents astres est égal à

$$ds = \sqrt{1+\varpi} \cdot dt \cong \left(1 + \frac{V}{c^2}\right) dt$$

Des chronomètres identiques marquent le même intervalle entre le commencement et la fin de chacune des périodes semblables par lesquelles ils mesurent le temps ; l'intervalle *dt* correspondant sera donc différent en des endroits où le potentiel est différent.

Si on admet que les éléments chimiques ont une constitution identique sur le soleil et sur la terre, ~~nous devons admettre~~ on doit conclure que ~~la période des~~ les longueurs ~~d'ondes émises par~~ d'ondes caractéristiques de ces éléments sont plus grandes sur le soleil ~~sont plus lentes~~ dans le rapport

$$1 + \frac{V_T - V_S}{c^2}$$

[p. 117] La vérification expérimentale de cette conclusion est rendue très difficile par suite de certaines anomalies qui se présentent dans l'observation des raies solaires et surtout par suite de la difficulté de déterminer quelle influence a la pression sur les déplacements observés. ~~Quoi qu'il en soit~~ Cependant le résultat des recherches, sans être peut-être définitif, est nettement favorable aux conclusions de la nouvelle théorie.

§ 14. Les étoiles fixes

[p. 118] Lorsqu'on veut appliquer la théorie de la gravitation de Newton à l'ensemble des étoiles, on rencontre des difficultés auxquelles la théorie nouvelle donne une solution satisfaisante.

On peut supposer tout d'abord que les étoiles sont en nombre fini. La densité de l'univers stellaire tend alors vers zéro lorsqu'on s'éloigne indéfiniment. Cette conception donne lieu à plusieurs difficultés. La lumière émise par les étoiles s'éloigne sans retour. L'énergie des étoiles se dissipe peu à peu vers l'infini. De plus il paraît bien difficile de se rendre compte de la stabilité de l'univers. On peut comparer la multitude des étoiles aux molécules d'un gaz. Les forces centrales qui agissent entre les étoiles sont analogues à celles que suppose entre les molécules la théorie cinétique des gaz. Il est impossible d'admettre la stabilité d'une masse gazeuse qui n'est pas contenue par une paroi et dont la densité tend vers zéro, lorsqu'on s'éloigne à l'infini ; il n'est pas plus possible d'admettre une solution semblable pour l'ensemble des étoiles. On pourrait renoncer à la loi de Newton et supposer que le potentiel croit sans limite à l'infini. Les étoiles qui tendraient à s'éloigner définitivement seraient ainsi ramenées nécessairement vers l'amas des autres. On devrait alors constater que les vitesses des étoiles éloignées sont beaucoup plus grandes que celles des étoiles rapprochées. L'observation ne décèle rien de semblable.

Si au contraire on admet qu'en s'éloignant indéfiniment on rencontre une densité moyenne d'étoiles égale à celle des étoiles que nous observons dans le domaine qui est accessible à nos **[p. 119]** observations, on suppose nécessairement que les étoiles sont en nombre infini ; la loi de Newton ne peut s'appliquer, on devrait constater une force infinie dirigée vers le centre de gravité de l'ensemble des étoiles. On ne voit d'ailleurs pas très bien ce que pourrait être le centre de gravité d'une masse homogène indéfinie, et l'on ne peut naturellement songer à accepter ces forces infinies.

On peut éviter ces dernières difficultés en modifiant la loi de Newton, il suffit de remplacer le potentiel newtonien V défini par l'équation de Poisson.

$$\square V = 4\pi K\rho \tag{1}$$

où K est la constante de l'attraction et ρ la densité de la matière par un potentiel V défini par l'équation

$$\square V - \lambda V = 4\pi K\rho \tag{2}$$

où λ désigne une constante universelle.

Lorsqu'on considère un domaine contenant un très grand nombre d'étoiles, la densité peut être considérée comme une constante ρ_0 et l'équation modifiée de Poisson admet la solution constante.

$$V = -\frac{4\pi K}{\lambda}\rho_0$$

On peut donc concevoir un univers indéfini où la densité moyenne est constante. Il reste la difficulté qu'il faut supposer un nombre infini d'étoiles.

Quelles modifications devons-nous apporter aux équations tensorielles de la gravitation pour qu'elles se réduisent à la théorie que nous venons de développer lorsqu'on emploie les coordonnées usuelles ?

Les équations :

$$R_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$$

se réduisent dans le cas où la matière est en repos à

$$R_{\mu\nu} = -\kappa g^{\nu}_{\mu}\frac{\rho}{\sqrt{-g}}$$

et en employant des coordonnées particulières, on peut écrire

$$\Box\, g_{\mu\nu} = \frac{R_{\mu\nu}}{2} = -\frac{x}{2}g^{\nu}_{\mu}\rho$$

[p. 120] Ces équations sont équivalentes à l'équation de Poisson sous sa forme habituelle (1). On obtient en première approximation

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + 2V \tag{3}$$

Nous avons vu que les équations de la gravitation peuvent être mises sous une forme plus générale (§ 12-13).

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \tag{4}$$

On voit que la solution approchée de $g_{\mu\nu}$ (3) réduira ces équations à la forme nouvelle de l'équation de Poisson

$$\Box\, V - \lambda V = 4\pi K\rho$$

Intégrons les nouvelles équations.

Dans un univers de densité constante

$$\rho = \rho_0$$

Désignons toujours par $\delta_{\mu\nu}$ les coefficients de la forme

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2$$

Nous allons démontrer que les équations (4) admettent la solution

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} g_{44} = 1 & g_{i4} = 0 \\ g_{ij} = -\gamma_{ij} & \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

où les γ_{ij} représentent les potentiels métriques d'un espace sphérique de courbure constante R.

Ces potentiels s'obtiennent en éliminant x_4 entre les équations

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

et

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

En posant

$$\text{(6)} \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

on trouve

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \sum_{\mu}^{3}\sum_{\nu}^{3} \gamma_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \\ \text{(7)} \qquad \gamma_{\mu\nu} &= g_\mu^\nu + \frac{\kappa_\mu x_\nu}{R^2 - r^2} \end{aligned}$$

Dans le problème actuel tous les points doivent être équivalents. La solution (5) satisfait à cette condition. Cela résulte de la manière dont on calcule les $\gamma_{\mu\nu}$.

Il suffit donc de faire la démonstration pour un point quelconque. Nous choisirons

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

[p. 121] Les dérivées premières des $g_{\mu\nu}$ s'annulent en ce point. Les dérivées secondes y sont toutes nulles sauf

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{R^2} \qquad (i,j = 1,2,3)$$

Les $R_{\mu\nu}$ se réduisent alors à

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\sigma}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left[{}^{\mu\ \nu}_{\ \sigma} \right] - \sum_{\sigma}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[{}^{\mu\ \sigma}_{\ \sigma} \right]$$

On trouve pour ($\mu = \nu = 1, 2, 3$)

$$R_{\mu\mu} = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2}$$

tandis que $R_{\mu\nu}$ s'annule pour ($\mu = \nu = 4$) et pour ($\mu \neq \nu$).

Les équations (4) deviennent alors pour ($\mu = \nu = 1, 2, 3$)

$$\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\kappa\rho}{2}$$

et pour ($\mu = \nu = 4$)

$$-\lambda = -\frac{\kappa\rho}{2}$$

Ces équations sont vérifiées si nous posons

(8) $$\lambda = \frac{\kappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2} \ .$$

La géométrie des corps immobiles dans le champ est caractérisée par l'élément de distance (7).

* * *

Les $\gamma_{\mu\nu}$ sont les potentiels métriques de la géométrie sphérique (géométrie de Riemann au sens étroit). L'espace, quoique sans borne, a pourtant un volume fini. Nous ne sommes donc plus amenés comme précédemment à supposer infini le nombre des étoiles.

Calculons le volume total de l'espace.

Nous savons qu'il est égal à l'intégrale étendue à tout l'espace (§ 1-8).

$$\int \sqrt{\gamma} dx_1 dx_2 dx_3$$

[p. 122] où γ est le déterminant des potentiels $\gamma_{\mu\nu}$.

$$\gamma = \begin{vmatrix} 1 + \frac{x_1^2}{R^2 - r^2} & \frac{x_2 x_1}{R^2 - r^2} & \frac{x_3 x_1}{R^2 - r^2} \\ \frac{x_1 x_2}{R^2 - r^2} & 1 + \frac{x_2^2}{R^2 - r^2} & \frac{x_3 x_2}{R^2 - r^2} \\ \frac{x_1 x_3}{R^2 - r^2} & \frac{x_2 x_3}{R^2 - r^2} & 1 + \frac{x_3^2}{R^2 - r^2} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est égal à

$$\gamma = \frac{R^2}{R^2 - r^2}$$

On peut écrire d'après (6)

$$dx_1 dx_2 dx_3 = 4\pi r^2 dr$$

Le volume total de l'espace est donc

$$\int_0^\infty \frac{4\pi R r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R^3$$

La masse totale d'un univers sans borne de densité constante ρ est donc

$$M = 2\pi \rho R^3 \qquad (9)$$

ou d'après (6)

$$M = 4\pi \frac{R}{\kappa} = \sqrt{\frac{32\pi^2}{\kappa^3 \rho}} \qquad (10)$$

Chapitre V. Les masses électriques

[p. 123] La définition du champ électromagnétique par le mouvement qu'il communique à des particules électrisées, a été étudiée au § 6. Nous avons ainsi donné aux lois qui expriment l'action des champs sur les masses une forme indépendante du mode de repérage utilisé pour étudier les phénomènes.

Il est facile de se rendre compte que les quantités que nous avons introduites alors sont des tenseurs.

Nous avons considéré en plus que l'invariant ds, un autre invariant

$$\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \varphi_3 dx_3 + \varphi_4 dx_4 = \sum_\alpha \varphi_\alpha dx_\alpha$$

Les potentiels électromagnétiques φ_σ se transforment, lorsqu'on fait un changement de coordonnées, par des équations de la forme

$$\varphi'_\sigma = \sum_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} \varphi_\alpha \tag{1}$$

C'est en cela que consiste le caractère tensoriel d'un covariant φ_σ. Le champ électro-magnétique

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} \tag{2}$$

est aussi un tenseur. On a en effet

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi'_\mu}{\partial x'_\nu} - \frac{\partial \varphi'_\nu}{\partial x'_\mu}$$

et d'après (1)

$$\frac{\partial \varphi'_\mu}{\partial x'_\nu} = \sum_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sum_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \varphi_\alpha$$

[p. 124] et en effectuant la dérivation

$$\frac{\partial \varphi'_\mu}{\partial x'_\nu} = \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} + \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \right) \cdot \varphi_\alpha$$

Le dernier terme peut s'écrire

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} \varphi_\alpha$$

il ne change pas lorsqu'on permute μ et ν.

On obtient donc bien

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} F_{\alpha\beta}$$

Le courant électrique et la masse d'électricité ont été représentés par

$$\mathcal{I}^\alpha = e \frac{dx_\alpha}{ds} \tag{3}$$

où e est la densité d'électricité.

Cette quantité n'est pas un tenseur. Il faudra pour obtenir un tenseur procéder comme nous l'avons fait dans le cas des masses matérielles.

$$J^\alpha = \frac{e}{\sqrt{-g}} \frac{dx_\alpha}{ds}$$

sera un tenseur. $\mathcal{I}^\alpha$ est la densité tensorielle correspondante. Enfin la force électro-magnétique

$$f_\mu = - \sum_{\sigma} F_{\mu\sigma} \mathcal{I}^\sigma \tag{4}$$

est aussi une densité tensorielle.

f_μ (§ 6-9) est le produit par m du premier membre de l'équation (§ 5-7) obtenue dans l'étude du mouvement d'un point libre. Nous avons désigné par f^μ le produit par m du premier membre de l'équation (§ 5-10) du même paragraphe. La manière dont on passe d'une forme à l'autre montre que **[p. 125]** f_μ et f^μ sont deux densités tensorielles associées.

On aura ainsi

$$f_\mu = \sum_{\alpha} g_{\mu\alpha} f^\alpha$$

Nous avons exprimé f^α en fonction du tenseur d'énergie matérielle. Nous avons trouvé (§ 11-11)

$$f^{\alpha}=\sum_{\sigma}\frac{\partial T^{\alpha\sigma}}{\partial x_{\sigma}}+\sum_{\sigma}\sum_{\tau}\left\{ {\sigma\tau \atop \alpha} \right\}T^{\sigma\tau}$$

f_{μ} s'exprime donc en fonction du tenseur d'énergie matérielle par l'équation

$$f_{\mu}=\sum_{\alpha}\sum_{\sigma}g_{\mu\alpha}\frac{\partial T^{\alpha\sigma}}{\partial x_{\sigma}}+\sum_{\alpha}\sum_{\sigma}\sum_{\tau}g_{\alpha\mu}\left\{ {\sigma\tau \atop \alpha} \right\}T^{\sigma\tau}$$

Cette expression peut se transformer en introduisant la densité tensorielle

$$T_{\mu}^{\sigma}=\sum_{\alpha}g_{\mu\alpha}T^{\alpha\sigma}$$

associée à $T^{\alpha\sigma}$.

<u>En remarquant (§ 5-17') que</u> [1]

$$\sum_{\alpha}g_{\alpha\mu}\left\{ {\sigma\tau \atop \alpha} \right\}=\left[{\sigma\tau \atop \mu} \right]$$

et à cause de la symétrie de $T^{\sigma\tau}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}f_{\mu} \;=\; & \sum_{\sigma}\frac{\partial T_{\mu}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}}-\sum_{\alpha}\sum_{\sigma}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_{\sigma}}T^{\alpha\sigma}+\\ & \sum_{\tau}\sum_{\sigma}\frac{\partial g_{\tau\mu}}{\partial x_{\sigma}}T^{\sigma\tau}-\frac{1}{2}\sum_{\sigma}\sum_{\tau}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_{\mu}}T^{\sigma\tau}\end{aligned}$$

Les deuxième et troisième termes se détruisent. On le voit immédiatement en écrivant l'indice sommatoire τ au lieu de α.

Il reste donc

$$f_{\mu}=\sum_{\sigma}\frac{\partial T_{\mu}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}}-\frac{1}{2}\sum_{\sigma}\sum_{\tau}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_{\mu}}T^{\sigma\tau} \qquad (5)$$

Les équations (4) et (5) sont les équations du mouvement des **[p. 126]** masses électriques en fonction du tenseur d'énergie matérielle.

(1) Ajouté.

Les lois que nous venons de rappeler interprètent complètement l'action des champs sur les masses. Il nous faut maintenant aborder l'étude de l'action des masses électriques sur les champs.

Rappelons tout d'abord ce que nous apprend l'expérience à ce sujet.

La loi par laquelle le potentiel scalaire φ dépend de la répartition des masses est analogue à la loi de Newton. On peut l'écrire en employant une unité convenable pour la masse électrique (unités Heaviside).

$$\varphi = \sum \frac{1}{4\pi} \frac{e}{r}$$

ou inversement, en utilisant l'équation de Poisson :

$$\square \varphi = -e \tag{6}$$

Ces lois sont équivalentes à la loi de Coulomb.

L'action des courants ou des particules matérielles sur le champ est exprimée par la loi de Laplace. En employant le potentiel électromagnétique

$$-\varphi_x, -\varphi_y, -\varphi_z$$

on peut l'écrire

$$-\varphi_x = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{e\nu_x}{r}$$

et les deux équations analogues, ou en employant l'équation de Poisson.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \square \varphi_x & = & ev_x \\ \square \varphi_y & = & ev_y \\ \square \varphi_z & = & ev_z \end{array} \right. \tag{7}$$

Le potentiel électro-magnétique ne serait pas déterminé par les **[p. 127]** équations que nous venons d'écrire. Pour lever cette indétermination il faut ajouter une équation. On peut lui donner avec Maxwell la forme

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

Le terme $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est nécessaire, lorsqu'on emploie des potentiels retardés.

Il nous faut rechercher une équation tensorielle qui se réduise aux équations précédentes, lorsqu'on utilise les coordonnées qui y sont employées. Ces coordonnées sont celles pour lesquelles les dérivées des $g_{\mu\nu}$ sont nulles (au moins approximativement) et où ds^2 se réduit à

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2$$

Nous avons trouvé (§ 11-13) que

$$\sum_\sigma \frac{\partial \mathcal{T}^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma}$$

est une expression tensorielle si

$$\mathcal{T}^{\mu\sigma} = -\mathcal{T}^{\sigma\mu}$$

$AF_{\alpha\beta}$ correspond la densité tensorielle $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$. La densité contrevariante associée est

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \sum_\alpha \sum_\beta g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}$$

L'expression

$$\sum_\sigma \frac{\partial \mathcal{F}^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma}$$

est donc un tenseur.

Lorsqu'on emploie les coordonnées utilisées dans les équations (6, 7, 8) cette expression se simplifie. En effet,

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1, \quad g^{44} = 1, \quad \sqrt{-g} = 1$$

les autres $g_{\mu\nu}$ et toutes les dérivées premières sont nuls. On obtient **[p. 128]**

$$\sum_\sigma \frac{\partial \mathcal{F}^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \sum_\sigma \pm \frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma}$$

où l'on doit prendre le signe + si l'indice *4* ne figure pas parmi les deux indices μ et σ et le signe - dans le cas contraire. En remplaçant $F_{\mu\sigma}$ par sa valeur en fonction des φ (2), cette expression s'écrit

$$\sum_\sigma \pm \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_\sigma^2} - (\pm) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\sigma}$$

ou pour $\mu = 1$

$$\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_z}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \Box\,\varphi_x$$

à cause de l'équation supplémentaire de Maxwell (8).

On aurait pour ($\mu = 2, 3$) des expressions analogues en y et en z. Pour ($\mu = 4$) on trouve

$$-\Box\,\varphi$$

D'autre part lorsque les vitesses sont de l'ordre de celles qui se rencontrent dans les expériences

$$e, e\nu_x, e\nu_y, e\nu_z$$

peuvent être représentés par la densité tensorielle

$$\mathcal{I}^\mu = e\frac{dx_\mu}{ds}$$

Les formules (6) et (7) peuvent donc être mises sous la forme tensorielle

$$\sum_\sigma \frac{\partial \mathcal{F}^{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \mathcal{I}^\mu \tag{9}$$

C'est la loi générale de l'action des masses sur les champs électriques.

Pesanteur des champs électriques

En tenant compte de la loi que nous venons de **[p. 129]** trouver, l'équation du mouvement des corps électrisés (4) s'écrit en remplaçant $\mathcal{I}^\mu$ par sa valeur

$$f_\mu + \sum_\sigma \sum_\tau \mathcal{F}_{\mu\sigma} \frac{\partial \mathcal{F}^{\sigma\tau}}{\partial x_\tau} = 0 \tag{10}$$

f_μ peut s'exprimer au moyen du tenseur d'énergie matérielle (5). Nous avons vu que des équations de la gravitation on peut déduire que f^μ s'annule identiquement. Il s'en suit que f_μ s'annule aussi. Les équations que nous venons de trouver signifient donc que les équations de la gravitation ne sont plus appliquables [sic]. Elles doivent être modifiées, lorsque l'action électromagnétique subie par une particule chargée n'est pas nulle.

Dans les équations de la gravitation, nous devrons ajouter au tenseur d'énergie matérielle un terme supplémentaire, le tenseur d'énergie électrique.

L'expression

$$f_\mu = \sum_\sigma \frac{\partial \mathcal{T}_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2}\sum_\sigma\sum_\tau \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu}\mathcal{T}^{\sigma\tau} \tag{11}$$

s'annule lorsque $\mathcal{T}_\mu^\sigma$ représente le tenseur d'énergie matérielle seul. Lorsqu'on remplace $\mathcal{T}_\mu^\sigma$ par le tenseur d'énergie électrique, que nous cherchons f_μ doit se réduire à (10). On obtient ce résultat en posant l'équation tensorielle

$$\mathcal{T}_\mu^\sigma = -\sum_\alpha F_{\mu\alpha}\mathcal{F}^{\sigma\alpha} + g_\mu^\sigma \frac{1}{4}\sum_\alpha\sum_\beta F_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta} \tag{12}$$

Il suffit de le démontrer en un point M en employant des coordonnées particulières. Nous supposerons donc que les dérivées des $g_{\mu\nu}$ s'annulent en ce point et que les $g_{\mu\nu}$ se réduisent à

$$g_{\mu\nu} = g_\mu^\nu$$

Dans ce cas les équations (10) (11) et (12) se réduisent **[p. 130]** respectivement à

$$f_\mu + \sum_\sigma\sum_\tau F_{\mu\sigma}\frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\tau} = 0 \tag{10'}$$

$$f_\mu = \sum_\sigma \frac{\partial T_\mu^\sigma}{\partial x_\sigma} \tag{11'}$$

et

$$T_\mu^\sigma = -\sum_\alpha F_{\mu\alpha}F_{\sigma\alpha} + \frac{1}{4}g_\mu^\sigma \sum_\alpha\sum_\beta F_{\alpha\beta}^2 \tag{12'}$$

Remplaçons T_μ^σ par sa valeur et effectuons la dérivation

$$(13)\qquad \begin{aligned} f_\mu &= -\sum_\sigma\sum_\alpha \frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}F_{\sigma\alpha} - \sum_\sigma\sum_\alpha F_{\mu\alpha}\frac{\partial F_{\sigma\alpha}}{\partial x_\sigma} \\ &\quad + \frac{1}{4}\times 2\sum_\alpha\sum_\beta F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \end{aligned}$$

Le second terme est identique à celui que nous devons trouver.

Il faut donc montrer que les deux autres se ~~déterminent~~ détruisent.

Remplaçons les $F_{\alpha\beta}$ par leurs valeurs en fonction des φ (2), le premier terme devient

$$-\sum_\sigma\sum_\alpha\left(\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial x_\alpha\partial x_\sigma} - \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial x_\mu\partial x_\sigma}\right)\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\sigma}\right)$$

$$= -\sum_\sigma\sum_\alpha\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial x_\alpha\partial x_\sigma}\dfrac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\alpha} - \dfrac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial x_\alpha\partial x_\sigma}\dfrac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\sigma} \\ - \dfrac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial x_\mu\partial x_\sigma}\dfrac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\alpha} + \dfrac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial x_\mu\partial x_\sigma}\dfrac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\sigma} \end{array}\right]$$

Les termes de la première ligne se détruisent car ils ont une même valeur absolue si on échange les indices sommatoires.

Calculons le dernier terme de (13)

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha\sum_\beta\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_\mu} - \frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial x_\alpha\partial x_\mu}\right)$$

[p. 131] ou en réduisant les termes qui ne diffèrent que par la notation des indices sommatoires

$$\sum_\alpha\sum_\beta\left[\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_\mu} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial x_\mu\partial x_\alpha}\right]$$

En écrivant l'indice sommatoire σ au lieu de β, on voit que tous les termes se détruisent.

Nous avons utilisé des tenseurs covariants pour écrire les équations de la gravitation. Nous devons donc mettre le tenseur d'énergie électrique sous forme covariante. Il suffit d'utiliser le tenseur associé à $\mathcal{T}_{\mu}^{\sigma}$

$$T_{\mu\nu} = \sum_{\sigma} \frac{g_{\sigma\nu}}{\sqrt{-g}} \mathcal{T}_{\mu}^{\sigma}$$

Dans les équations générales de la gravitation

$$R_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T)$$

nous devons considérer $T_{\mu\nu}$ comme la somme du tenseur d'énergie matérielle et du tenseur d'énergie électrique. Le tenseur contracté d'énergie électrique est nul. On s'en rend compte immédiatement en le calculant au moyen de l'équation (12).

$$T = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{\sigma} \mathcal{T}_{\sigma}^{\sigma} = 0.$$

Louvain, le 31 mai 1922.

G. Lemaître