Urszula Wybraniec-Skardowska

O konceptualizacji wiedzy nieostrej

Filozofia Nauki 4/3, 45-62

1996

Filozofia Nauki
Rok IV, 1996, Nr 3(15)

Urszula Wybraniec-Skardowska

O konceptualizacji wiedzy nieostrej

1. O problematyce nieostrości

Problem wiedzy nieprecyzyjnej czy nieostrej, jej reprezentacji oraz konceptualizacji ma już bogatą tradycję i wciąż jest jednym z problemów najbardziej godnych dyskusji. Wyrósł on z refleksji filozoficznej nad nazwami nieostrymi języka potocznego i nad wartością tego języka dla filozofii i dla nauki. W filozofii problem ten zaznaczył się głównie w sporach dotyczących tego, jak należy uprawiać naukę: czy w sposób precyzyjny, wolny od pojęć nieostrych, czy też rezygnując niekiedy z takiej precyzji.

O ile ta pierwsza tendencja w podejściu do nieostrości, zapoczątkowana przez B. Russella (1929), dominowała do lat sześćdziesiątych, o tyle druga z nich zaczęła się upowszechniać dzięki filozofom języka, takim jak L. Wittgenstein (1953) i J.L. Austin (1961), oraz filozofom nauki, takim jak T.S. Kunh (1962) i M. Polanyi (1962).

Obecność w języku naturalnym wyrażeń nieostrych była też źródłem refleksji logików i lingwistów. W logice wątek nieostrości przewijał się od dawna w dyskusjach i sporach nad sensownością, prawdziwością i odniesieniem przedmiotowym takich na przykład wyrażeń, jak

(*) Jan jest MŁODY.

Stawiano pytanie: Czy wyrażenie to może być poprawnie użyte, gdy Jan ma 25 lat? Znaczenie użytej w (*) nazwy „MŁODY" jest takie, że nie potrafimy udzielić poprawnej odpowiedzi na to pytanie, gdyż nie potrafimy rozstrzygnąć, czy osoba w wieku 25 lat jest młoda, czy też nie. I choć istnieją pozytywne przykłady użycia tego wyrażenia w odniesieniu do osób, które nie przekroczyły 18 lat, i istnieją także negatywne przykłady użycia tego wyrażenia, w odniesieniu do osób, które przekroczyły, powiedzmy, 35 lat, to, poza tymi niekontrowersyjnymi przypadkami, spotykamy sytuacje, kiedy nie wiemy, czy wyrażenie to jest prawdziwe — czy fałszywe. Może więc zdanie (*) w ogóle jest pozbawione wartości logicznej? Co zatem z zasadą wyłączonego środka? A ponadto, do czego wyrażenie to się odnosi? Czy występujące w nim słowo „MŁODY" denotuje określony zbiór osób? Czy mający 25 lat Jan należy do niego? Czy potrafimy ten zbiór wskazać?

Poruszone tu problemy należą do semantyki logicznej i wiążą się z takim rozumieniem nieostrości, przy którym zakłada się istnienie przypadków granicznych i niegranicznych — zwanych *brzegowymi*. Nieumiejętność udzielenia odpowiedzi na podane powyżej pytania nie wynika ze stanu naszej wiedzy, ale ze znaczenia wyrażenia (*). Próby rozwiązania poruszonych problemów nie dały, jak dotąd, zadawalających rezultatów, choć sama problematyka stała się aktualna również w związku z logiczną analizą języka nauk empirycznych M. Przełęckiego (1964) oraz badaniami informatyków interesujących się sztuczną inteligencją. Badania te — zapoczątkowane pracą L.A. Zadeha (1965), twórcy teorii zbiorów rozmytych — mają na celu zastosowanie komputerów do korzystania z informacji nieostrej, tak jak robi to nasz mózg; chodzi w szczególności o możliwość przeprowadzania przez komputer wnioskowań z pojęciami nieostrymi. Teoria Zadeha dopuszcza stwierdzenie przynależności obiektu danej rzeczywistości (na przykład naszego Jana) do zbioru (w naszym przykładzie — do zbioru ludzi MŁODYCH) tylko w pewnym stopniu, stopniu określonym liczbą z przedziału (0, 1). Stopniowalność należenia elementu do zbioru jest tu cechą charakterystyczną odpowiadającego mu pojęcia nieostrego. Ów element (w naszym przykładzie — Jan) może być nazwany *quasi-desygnatem* nazwy nieostrej wyznaczającej to pojęcie (w naszym przykładzie — nazwy „MŁODY"), sama zaś nazwa — *quasi-nazwą*. Zakres tej nazwy jest wtedy czymś innym niż «zwykły» zakres nazw czy pojęć ostrych. Jest on pewnym *zbiorem rozmytym* i zarazem *zakresem* pojęcia nieostrego odpowiadającego tej quasi-nazwie. Teoria zbiorów rozmytych prowadzi do logiki nieklasycznej, w której klasyczne wartości prawdy i fałszu zastępuje się wartościami z przedziału domkniętego [0, 1].

Tak więc lata sześćdziesiąte przyniosły z jednej strony akceptację zjawiska nieostrości w języku i nauce, z drugiej — nowe, zorientowane semantycznie lub informatycznie, rozwiązania samego problemu nieostrości. Rezultaty tych rozwiązań okazały się jednak nie dość zadowalające. Świadczą o tym chociażby wciąż nowe próby i poszukiwania w tym zakresie, prowadzone w różnych ośrodkach, w tym w Polsce (Z. Muszyński (red.) 1988). Prekursorem formalnego podejścia do problemu nieostrości i w ogóle badań nad nieostrością w Polsce jest logik — T. Kubiński (1958), który zbudował nieklasyczny rachunek nazw nieostrych. W tym miejscu należy też zaznaczyć, że w 1982 roku powstała formalna teoria komplementarna w stosunku do teorii Zadeha — teoria zbiorów przybliżonych. Zbudował ją znany polski informatyk — Z. Pawlak (1982, 1991).

Teoria Pawlaka podchodzi do zagadnienia nieostrości nienumerycznie, w przeciwieństwie do ilościowej charakterystyki zjawiska nieostrości przez Zadeha. Porusza ona aspekty jakościowe i oparta jest na idei zbioru aproksymowanego przez parę zbiorów zwanych *dolnym* i *górnym przybliżeniem zbioru*. Przybliżenia te określają, odpowiednio, *pozytywny* i *negatywny zakres* pojęcia nieostrego. Podejście Pawlaka wiąże się z odniesieniem do pojęcia wiedzy podmiotu poznającego o obiektach badanej rzeczywistości (por. Pawlak 1992). Ma więc ono jednocześnie charakter epistemiczny. Wiedza owa jest determinowana przez układ pojęć, a ten z kolei — przez system ich zakresów. Gdy zakres pojęcia jest nieostry, wyznacza go *zbiór przybliżony*, rozumiany jako rodzina zbiorów mających te same przybliżenia dolne i górne.

Zasadnicze idee koncepcji Pawlaka miały ogromny wpływ na zbudowanie przeze mnie logicznej teorii pojęć nieostrych, której zarys jest przedstawiony w dalszej części tej pracy, przy czym inspiracji dostarczyły mi także pomysły i rozwiązania innych badaczy wymienionych w tej części pracy.

2. Charakterystyka podejścia do problemu nieostrości

Ani koncepcja Zadeha, ani koncepcja Pawlaka nie rozwiązują wielu problemów, które wiążą się z konceptualizacją wiedzy nieostrej, rozumianej tu jako ukształtowanie systemu pojęć odpowiadających obiektom poznawanej przez podmiot (człowieka) rzeczywistości, a dokładniej — jako wyznaczanie systemu denotacji tych pojęć. Źródło leży — jak się zdaje — w braku opracowania logicznych podstaw teorii nieostrości: formalizmu, który dostarczyć może tylko logika wraz z teorią mnogości. Zakres stosowalności środków formalno-logicznych musi być jednak oparty na pewnych założeniach, dotyczących sposobu traktowania samego zjawiska nieostrości.

Proponowany przeze mnie sposób ujęcia logicznej teorii nieostrości nie ma oczywiście na celu relacjonowania mechanizmów powstawania nieostrości. Teoria nieostrości opisuje czym jest nieostrość — i to nie tylko jako zjawisko językowe. Teoria taka nie może oczywiście ująć wszystkich aspektów zjawiska nieostrości. Może jednak starać się dostarczyć możliwie ogólnej charakterystyki pojęcia *nieostrości*, dając również odpowiedź na podstawowe pytania nurtujące od dawna filozofów i logików języka, pytania o charakterze wskazanym w pierwszej części pracy.

Proponowana koncepcja, będąca jednocześnie próbą teoretycznego opisu modelu konceptualizacji pojęć nieostrych, oparta jest na podstawowym założeniu, że *nieostrość jest cechą subiektywną*, zależną od podmiotu poznającego rzeczywistość czy posługującego się językiem tę rzeczywistość opisującym. Ujmuje ona problematykę nieostrości w czterech aspektach i ma na uwadze następujące wskaźniki, uwzględniające te aspekty:

(a) wiedzę nieostrą — aspekt epistemiczny,

(b) obiekt nieostry — aspekt ontologiczny,

(c) nazwę nieostrą — aspekt semiotyczny (semantyczny i pragmatyczny),

(d) pojęcie nieostre — aspekt logiczny.

Wskaźniki te są ze sobą skorelowane — każdy wymieniony wcześniej ma wpływ na następny i każdy następny ma wpływ na poprzedni.

Punktem wyjścia, determinującym kierunek rozważań, jest pojęcie *wiedzy podmiotu* o obiektach rzeczywistości, a właściwie określonego fragmentu tej wiedzy. Mówiąc obrazowo: wiedza kształtuje język, a język ma wpływ na wiedzę; jednak język, jako twór wtórny, może nie odzwierciedlać całej wiedzy.

Dlatego też wydaje się zasadne zrezygnowanie z językowej, w szczególności semantycznej, płaszczyzny dociekań i osadzenie formalnej teorii na płaszczyźnie poznawczej. Stanowisko takie dopuszcza istnienie wiedzy niezwerbalizowanej i nawiązuje do poglądów wzmiankowanych już filozofów, takich jak: Wittgenstein, Austin, Polanyi, Kuhn i inni (por. np. Janas-Kaszczyk 1988; Marciszewski 1994)). Zjawisko nieostrości traktuje się tu jako nieodłączną cechę metody poznania rzeczywistości.

3. Pojęcie wiedzy; wiedza nieostra

Charakter pracy nie pozwala na dokładne sprecyzowanie pojęcia *wiedzy w ogóle*, a wiedzy nieostrej w szczególności. Dla potrzeb tej pracy poprzestaniemy zatem na podaniu definicji nie całkiem ścisłych, ale oddających zasadnicze intuicje związane z tymi pojęciami (por. Wybraniec-Skardowska 1994 a i b, 1995).

Każdy poznawany fragment rzeczywistości, stosunkowo stabilny, ukonstytuowany pod jakimś względem lub względami (aspektami)[1], można przedstawić jako uporządkowany system

$$\mathfrak{R} = \langle U, R_1, R_2, ..., R_n \rangle.$$

Jest on złożony z niepustego *uniwersum* U obiektów tej rzeczywistości oraz wszystkich jedno- lub wieloargumentowych relacji R_i (i = 1, 2, ..., n), w powiązaniu z którymi obiekty te tworzą spójną, interesującą nas pod określonymi względami, całość.

Rzeczywistość $\mathfrak{R}$ *jest obiektywna w stosunku do poznania*. Relacje jednoargumentowe, rozumiane jako cechy[2] obiektów uniwersum U, są formalnie identyfikowane z niepustymi podzbiorami U i traktowane jako zbiory obiektów uniwersum posiadających te cechy. Relacje wieloargumentowe, k-argumentowe ($k > 1$) są rozumiane jako stosunki między obiektami uniwersum i formalnie identyfikowane z podzbiorami iloczynu kartezjańskiego k zbiorów U — czyli podzbiorami zbioru U^k.

W dalszym ciągu, często będziemy się odwoływać do następującego przykładu «rzeczywistości»:

Przykład. Załóżmy, że G jest grupą tych osób urodzonych w Warszawie po 1965 roku, które wyemigrowały do Stanów Zjednoczonych. Rzeczywistość $\mathfrak{G}$, której uniwer-

---

[1] Ten «wzgląd» czy «względy», czyli aspekty, można tu rozumieć jako atrybuty czy, odpowiednio, atrybuty w systemach informacyjnych Pawlaka (1983).

[2] Cecha nie musi być tu czymś pojedynczym. Może nią być cecha złożona z pojednczych cech. W systemach informacyjnych Pawlaka (1983, 1991) każda cecha jest wyznaczona przez pojedynczą wartość atrybutu czy, odpowiednio, przez skończony zbiór wartości tego atrybutu. Każda taka wartość jednoznacznie wyznacza relację jednoargumentową jako zbiór obiektów uniwersum, posiadających tę samą wartość atrybutu lub posiadających co najmniej jedną ze skończonego zbioru wartości tego atrybutu.

sum jest ta grupa ludzi, wyróżnijmy ze względu na następujące dwa aspekty: WIEK i WSPÓLNE ZAMIESZKIWANIE W OKREŚLONYM STANIE. Rzeczywistość $\mathfrak{G}$ jest zatem złożona z grupy osób G, z wszystkich cech, które mogą przysługiwać tym osobom ze względu na WIEK (np. posiadanie nie więcej niż 18 lat, posiadanie dokładnie 25 lat, posiadanie nie mniej niż 20 lat i nie więcej niż 25 lat, itp.) oraz ze wszystkich dwuargumentowych relacji, w których te osoby mogą występować ze względu na WSPÓLNE ZAMIESZKIWANIE W OKREŚLONYM STANIE (np. wspólne zamieszkiwanie w stanie Nowy York, wspólne zamieszkiwanie w stanie Illinois, wspólne zamieszkiwanie w stanie Kalifornia, itd.).

Wiedzę podmiotu o uniwersum U rzeczywistości $\mathfrak{R}$ wyznacza wiedza (informacja) jednostkowa o poszczególnych obiektach tego uniwersum, ze względu na wszystkie R_i ($i = 1, 2, ..., n$).

Informacja (wiedza) jednostkowa o obiekcie u uniwersum, ze względu na określoną relację jednoargumentową R_i (cechę R_i), wyznaczoną przez aspekt a charakteryzujący rzeczywistość $\mathfrak{R}$, jest przyporządkowaniem obiektowi u możliwych, z punktu widzenia podmiotu, relacji (cech) czy zbiorów relacji (zbiorów cech) rzeczywistości $\mathfrak{R}$ wyróżnionych w niej przez aspekt a.

Informacja (wiedza) jednostkowa o obiekcie u uniwersum U, ze względu na określoną k-argumentową ($k > 1$) relację R_i, wyznaczoną przez aspekt b charakteryzujący rzeczywistość $\mathfrak{R}$, jest przyporządkowaniem obiektowi u możliwych z punktu widzenia podmiotu k–1-elementowych uporządkowanych układów obiektów z U czy zbiorów takich układów obiektów, z którymi u mógłby pozostawać w którejkolwiek relacji z rzeczywistości $\mathfrak{R}$ wyróżnionej przez aspekt b.

Wiedza podmiotu jest przy tym dokładna:

1° w wypadku jednoargumentowej relacji (cechy) R_i — gdy podmiot przyporządkowuje obiektowi u tę cechę (zbiór wszystkich obiektów uniwersum U posiadających tę cechę), czyli R_i, jeśli u ją posiada ($u \in R_i$), i zbiór pusty, jeśli u tej cechy nie posiada;

2° w wypadku k-argumentowej ($k > 1$) relacji R_i — gdy podmiot przyporządkowuje obiektowi u zbiór wszystkich uporządkowanych układów obiektów z U, z którymi pozostaje on w relacji R_i.

Dokładna informacja jednostkowa o obiektach uniwersum w wypadku 1°, gdy rozważamy ją ze względu na relację jednoargumentową R_i (cechę), jest zatem funkcją $\vec{R_i}$: $U \to \mathrm{P}(U)$, określoną wzorem:

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \vec{R_i}(u) = \begin{cases} R_i, \text{ gdy } u \in R_i, \\ \emptyset, \text{ gdy } u \notin R_i, \end{cases}$$

zaś w wypadku 2°, gdy rozważamy ją ze względu na relację k-argumentową ($k > 1$) R_i, jest ona funkcją $\vec{R_i}$: $U \to \mathrm{P}(U)^{k-1}$ określoną wzorem:

$$(\mathrm{I}_k) \qquad \vec{R_i}(u) = \{(u_1, u_2, ... ,u_{k-1}) \in \mathrm{P}(U)^{k-1}: (u_1, u_2, ...u..., u_{k-1}) \in R_i\}$$

dla dowolnego obiektu $u \in U$; $\mathrm{P}(U)$ jest tu rodziną wszystkich podzbiorów U, zaś $\mathrm{P}(U)^{k-1}$ iloczynem kartezjańskim k-1 zbiorów $\mathrm{P}(U)$.

Zauważmy, że dokładne jednostkowe informacje $\vec{R_i}$ są jednocześnie obiektywnymi składnikami wiedzy rzeczywistej o obiektach uniwersum rzeczywistości $\mathfrak{R}$ ze względu na funkcjonującą w niej relację R_i. Zbiory $\vec{R_i}(u)$, dla $u \in U$, nazywać będziemy *obrazami u ze względu na relację R_i*. Są one wyznaczone jednoznacznie, gdy wiedza jest dokładna.

Przykład. Gdy rzeczywistością jest $\mathfrak{G}$ i do jej uniwersum G należy Jan, to dokładną informacją jednostkową o Janie ze względu na cechę posiadania 25 lat jest przyporządkowanie Janowi właśnie tej cechy, jeśli Jan istotnie ma 25 lat, albo zbioru pustego, gdy Jan jest w innym wieku. Dokładną informacją o Janie ze względu na relację zamieszkiwania w stanie Nowy York jest przyporządkowanie mu klasy osób, które wraz z nim mieszkają w tym stanie, jeśli oczywiście Jan mieszka w tym stanie, i zbioru pustego, gdy Jan zamieszkuje w innym stanie lub żadna z osób, urodzonych w Warszawie po 1965 roku, nie mieszka teraz w stanie Nowy York.

Informacja jednostkowa o obiekcie u rzeczywistości $\mathfrak{R}$ ze względu na jednoargumentową relację R_i (cechę) jest pusta, gdy podmiot poznający rzeczywistość $\mathfrak{R}$ nie przypisuje obiektowi u ani cechy R_i ani żadnej innej cechy uwzględniającej ten sam aspekt charakteryzujący rzeczywistość $\mathfrak{R}$; w wypadku, gdy uwzględniamy k-argumentową ($k > 1$) relację R_i, informacja taka jest pusta, gdy podmiot nie przypisuje obiektowi u żadnego z takich uporządkowanych k-1-elementowych układów obiektów z U, które są z nim w relacji R_i lub w jakiejkolwiek innej relacji uwzględniającej ten sam aspekt charakteryzujący rzeczywistość $\mathfrak{R}$, albo też obiekt u nie jest po prostu w żadnej relacji wyznaczonej przez ten aspekt, który pozwolił nam na wyróżnienie relacji R_i.

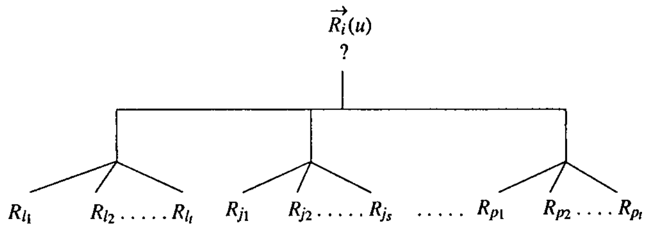
Jednostkowa wiedza o obiekcie u jest zatem pusta, gdy podmiot nic nie wie o wartości funkcji $\vec{R_i}$ dla u; wartość tej funkcji jest wtedy dla podmiotu niewiadomą — o pustym zakresie; równanie o postaci:

$$\vec{R_i}(u) = x, \qquad (?)$$

gdzie x jest niewiadomą, nie ma wtedy z jego punktu widzenia rozwiązania. Równanie to nazwiemy *równaniem niewiedzy podmiotu*.

Przykład. Informacja o Janie-emigrancie ze względu na cechę posiadania 25 lat jest dla nas pusta, gdy nie potrafimy w ogóle nic powiedzieć o wieku Jana. Wiedza o Janie ze względu na relację wspólnego zamieszkiwania w stanie Nowy York jest dla nas pusta, gdy w ogóle nie wiemy, że Jan wyemigrował do Stanów Zjednoczonych.

Jednostkowa wiedza podmiotu o obiekcie u ze względu na relację R_i może być niepusta, lecz *nieokreślona*. Wtedy to zależność (I_1) czy (I_k) jest dla podmiotu nieodkrywalna. Może tak być wtedy, gdy podmiot przyporządkowuje obiektowi u niejednoznacznie, w różnych sytuacjach różne, możliwe z jego punktu widzenia, obrazy $\vec{R_i}(u)$ tego obiektu ze względu na relację R_i. Równanie (?) ma wówczas dla niego co najmniej dwa rozwiązania, ale możliwości wskazania przypuszczalnych rozwiązań może być wiele. Obrazowo sytuację taką, dla jednoargumentowej relacji R_i, ilustruje poniższy diagram:



Wszystkie wskazane w podanym diagramie relacje (cechy) są możliwymi, z punktu widzenia podmiotu odkrywającego rzeczywistość $\mathbb{R}$, cechami, które może on przypisać obiektowi u. Gałęzie drzew ilustrują sytuacje, w których podmiot uwzględnia takie a nie inne możliwe cechy obiektu u ze względu na relację R_i.

W wypadku, gdy relacja R_i jest wieloargumentowa, sytuację nieokreśloności wiedzy może zilustrować diagram, w którym wierzchołki drzew zostają zastąpione oznaczeniami przypuszczalnych obrazów relacji R_i.

Gdy wiedza o obiekcie u jest *nieokreślona*, równanie (?) niewiedzy podmiotu dopuszcza wiele różnych układów rozwiązań. Ujmując rzecz formalniej:

Informacja jednostkowa o obiekcie u jest nieokreślona dla podmiotu ze względu na relacę R_i, gdy podmiot przyporządkowuje obiektowi u rodzinę złożoną z rodzin możliwych z jego punktu widzenia obrazów elementu u.

Dla uproszczenia rozważań, ograniczymy się w dalszym ciągu tylko do wypadku, gdy relacja R_i jest relacją jednoargumentową (cechą). Wówczas rodzina *nieokreśloności*, o której mowa powyżej, może być zadana równością (patrz diagram):

$$\mathcal{F}(R_i, u) = \{\{R_l\}_{l \in L}, \{R_j\}_{j \in J}, \ldots, \{R_p\}_{p \in P}\}.$$

Rodziny $V_s = \{R_m\}_{m \in M}$, gdzie $s < \tau$ i τ jest ustaloną liczbą skończoną, są tu niepustymi, możliwymi z punktu widzenia podmiotu zbiorami relacji (cech) rzeczywistości $\mathbb{R}$, spośród charakteryzujących obiekty jej uniwersum w określonym aspekcie, które ze względu na ten aspekt, w danej sytuacji, podmiot przypisuje obiektowi u[3]. Tak więc nieokreśloną informację o obiekcie u ze względu na relację R_i wyznacza związek: istnieje takie $s < \tau$, że

$$\vec{R_i}(u) \in V_s \in \mathcal{F}(R_i, u) = \{V_s\}_{s < \tau}.$$

Informacja nieokreślona o u jest więc przyporządkowaniem temu obiektowi któregokolwiek z dopuszczalnych przez niego zbiorów relacji (cech). Te zbiory relacji (cech) stanowią możliwe rozwiązania równania (?) niewiedzy podmiotu w konkretnych sytuacjach.

[3] Gdy aspekt ten traktujemy jako atrybut w systemie informacyjnym, informacji nieokreślonej odpowiada rodzina złożona ze wszystkich możliwych z punktu widzenia podmiotu rodzin klas elementarnych lub rodzin sum takich klas.

O rodzinie $F(R_i, u)$ zakładamy, że relacja (cecha) R_i jest zawarta co najmniej w jednej relacji (jest częścią co najmniej jednej cechy) każdej z rodzin V_s i nazywamy ją polem nieokreśloności wiedzy podmiotu o obiekcie u ze względu na relację R_i. Jeśli pole nieokreśloności takiej wiedzy jest złożone z co najmniej dwóch niejednoelementowych rodzin relacji, wiedzę podmiotu o obiekcie u nazywamy całkowicie dla niego nieostrą.

Rodziny relacji (cech) V_s, wyznaczające pole nieokreśloności wiedzy podmiotu ze względu na relację (cechę) R_i, nazywamy zbiorami aproksymującymi to pole ze względu na relację (cechę) R_i. O każdym zbiorze aproksymującym V_s zakładamy, że jest pokryciem uniwersum U; suma wszystkich relacji (cech) takiego zbioru daje U (cechę pełną), tzn.:

$$\bigcup V_s = U$$

Każdy zbiór aproksymujący V_s jest zbiorem możliwych rozwiązań równania niewiedzy podmiotu.

Gdy zbiór aproksymujący V_s jest co najmniej dwuelementowy, nazywamy go zbiorem nieostrym odpowiadającym wiedzy podmiotu o obiekcie u ze względu na relację (cechę) R_i. Sam obiekt u możemy przy tym nazwać obiektem nieostrym dla podmiotu ze względu na relację (cechę) R_i, a wiedzę o nim — wiedzą relatywnie nieostrą ze względu na tę relację.

Jednoelementowe zbiory aproksymujące (są to zbiory złożone z jednej relacji, a więc jednego zbioru) możemy nazywać zbiorami ostrymi dla podmiotu i identyfikować każdy taki zbiór-rodzinę z jego elementem (relacją-zbiorem), a więc ze zbiorem w zwykłym sensie, zwanym zbiorem dokładnym.

Każdy zbiór aproksymacyjny V_s posiada kres dolny i kres górny w rodzinie wszystkich podzbiorów $P(U)$ uniwersum U, ze względu na inkluzję. Tak więc dla każdego zbioru V_m istnieje największy podzbiór uniwersum U (cecha w rzeczywistości $\mathbb{R}$), który zawiera się w każdym zbiorze-relacji (jest częścią każdej cechy) wyznaczającej ten zbiór. W szczególności zatem każdy zbiór nieostry (rodzina co najmniej dwóch zbiorów-cech) ma kres dolny w $P(U)$. Podobnie, dla każdego zbioru aproksymującego V_s istnieje najmniejszy podzbiór uniwersum U (cecha rzeczywistości $\mathbb{R}$) zawierający wszystkie zbiory-relacje wyznaczające tęn zbiór. W szczególności zatem każdy zbiór nieostry ma kres górny. Gdy zbiór aproksymacyjny jest zbiorem ostrym, jego kresy są równe i identyczne z wyznaczającą go relacją (cechą).

Różnicę kresów — górnego i dolnego — danego zbioru aproksymującego nazywamy brzegiem tego zbioru. Zbiór aproksymujący jest zbiorem ostrym, gdy jego brzeg jest zbiorem pustym; w przeciwnym razie zbiór ten jest oczywiście zbiorem nieostrym.

Kresy dolny i kres górny zbioru aproksymującego nazywamy, odpowiednio, granicą dolną i granicą górną lub przybliżeniem dolnym i przybliżeniem górnym zbioru aproksymującego. Granice te wyznaczają, odpowiednio, pozytywny i negatywny obszar wiedzy podmiotu o obiekcie.

Wprowadzone pojęcia zilustrujemy przykładem.

Przykład. Jeśli, podobnie jak poprzednio, poznawaną rzeczywistością jest rzeczywistość $\mathfrak{S}$, to wiedzą całkowicie nieostrą o 25-letnim Janie-emigrancie ze względu na cechę posiadania 25 lat, czyli, formalnie, ze względu na zbiór M_{25} wszystkich żyjących w 1995 roku w Stanach Zjednoczonych osób, urodzonych w Warszawie po 1965 roku, może być przyporządkowanie Janowi którejkolwiek z poniższych rodzin zbiorów (cech):

$\mathcal{M}_1 = \{M_{<19}, M_{<25}, M_{\leq 30}\}, (M_{25} \subseteq M_{\leq 30})$;

$\mathcal{M}_2 = \{M_{<19}, M_{<20}, M_{<21}, ..., M_{<29}, M_{\leq 30}\}, (M_{25} \subseteq M_{<26}$ i $M_{25} \subseteq M_{\leq 30})$;

$\mathcal{M}_3 = \{M_{16}^{20}, M_{18}^{25}, M_{20}^{30}\}, (M_{25} \subseteq M_{18}^{25}$ i $M_{25} \subseteq M_{20}^{30})$;

$\mathcal{M}_4 = \{M_{18}^{20}, M_{19}^{25}, M_{20}, M_{20}^{25}\}, (\mathrm{M}25 \subseteq M_{19}^{25}$ i $M_{25} \subseteq M_{20}^{25})$.

Wyznaczają one pole nieokreśloności naszej wiedzy jako rodzinę $\mathcal{F}(M_{25}, \text{Jan}) = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4\}$ złożoną ze zbiorów nieostrych postaci M_k, $M_{<k}$, $M_{\leq k}$, M_k^l, będących zbiorami niepustymi, złożonymi z wszystkich tych osób urodzonych w Warszawie po 1965 roku, które wyemigrowały do USA i mają w 1995 roku, odpowiednio, dokładnie k lat, mniej niż k lat, nie więcej niż k lat, lub są w wieku od k do l lat włącznie. Zbiory te są traktowane jako cechy posiadania przez te osoby stosownej liczby lat. Zauważmy, że w każdym zbiorze nieostrym $\mathcal{M}_t$ (t = 1, 2, 3, 4) możemy wyróżnić co najmniej jeden zbiór (cechę), którego zbór M_{25} (cecha posiadania 25 lat) jest podzbiorem (jest częścią). Granicami dolnymi zbiorów $\mathcal{M}_t$ są odpowiednio zbiory: $M_{<19}$, $M_{<19}$, M_{20}, M_{20} a granicami górnymi, odpowiednio, zbiory: $M_{\leq 30}$, $M_{\leq 30}$, M_{16}^{30}, M_{18}^{25}, których pokryciami są kolejne zbiory $\mathcal{M}_t$.

Z przykładu widać, że pole nieokreśloności ukazuje niejako niejednolitość «sytuacyjną» wiedzy całkowicie nieostrej. Sytuacje, w których podmiot przyporządkowuje Janowi zbiory nieostre $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$, różnią się istotnie od sytuacji, w których podmiot przyporządkowuje mu zbiory nieostre $\mathcal{M}_3$ i $\mathcal{M}_4$. W tym pierwszym wypadku jednak, stopień nieostrości jest jakby mniejszy, gdyż granice zbiorów nieostrych są takie same. Nie znaczy to jednak, że relatywnie nieostra wiedza podmiotu o Janie w obu sytuacjach jest taka sama — odpowiadają jej w różnych sytuacjach różne zbiory nieostre.

Podany powyżej przykład pokazuje, że gdy granice nieostrości są takie same, stopień nieostrości wiedzy podmiotu, obejmującej podobne sytuacje, jest w pewnym sensie mniejszy. Wiedzę całkowicie nieostrą możemy nazwać wtedy po prostu „wiedzą nieostrą".

4. Logiczna konceptualizacja wiedzy nieostrej

Wprowadzone pojęcia *wiedzy* czy *informacji jednostkowej o obiekcie rzeczywistości* były zrelatywizowane do podmiotu traktowanego jako jednostka psychologiczna lub socjologiczna — do człowieka lub grupy ludzi. Podmiot taki był zatem w jakiś sposób odizolowany od języka (czy też innego systemu reprezentacji wiedzy), w którym wyraża on swoją wiedzę tak samo, jak przeciętny jego użytkownik. Wiedza takiego podmiotu zostaje zobiektywizowana przez reguły pragmatyczne i semantyczne języka czy innego systemu reprezentacji wiedzy. Ma ona wpływ na wiedzę każdego potencjalnego użytkownika tego systemu, na nią zaś samą ma wpływ wiedza każdego innego takiego użytkownika (zob.: Pelc 1971).

Nie uściślając różnicy między rozważanym wcześniej podmiotem konkretnym a podmiotem potencjalnym, ten ostatni uznamy za podmiot logiczny i do niego będziemy się odwoływać w naszych dalszych rozważaniach.

Weźmy teraz pod uwagę wiedzę pewnego podmiotu, reprezentowaną w jakimś systemie znaków, na przykład — w języku potocznym lub w systemie informacyjnym, traktowanym jako system reprezentacji wiedzy (zob.: Pawlak 1983, 1991). Na wiedzę taką, respektującą wiedzę zakodowaną w danym systemie znaków, składa się wiedza «wypadkowa» poszczególnych użytkowników tego systemu. Można ją scharakteryzować zależnościami podobnymi do podanych poprzednio, nie relatywizując wprowadzonych pojęć do konkretnego podmiotu.

Wiedza całkowicie nieostra czy nieostra jest wówczas reprezentowana w języku przez zdanie atomowe, zawierające jako predykat termin nieostry — termin całkowicie nieostry lub nieostry, któremu odpowiada pojęcie logiczne, zwane tu „pojęciem całkowicie nieostrym" lub, odpowiednio, „pojęciem nieostrym". Pojęciu (terminowi) temu, w zależności od stopnia nieostrości wiedzy, odpowiada niejednoelementowe pole nieokreśloności zwane „denotacją pojęcia (terminu) całkowicie nieostrego" czy, odpowiednio, „denotacją pojęcia (terminu) nieostrego".

Kiedy jednostkowa wiedza jest relatywnie nieostra, jest ona w języku reprezentowana przez zdanie atomowe z terminem nieostrym — terminem relatywnie nieostrym, któremu odpowiada pojęcie logiczne, zwane tu relatywnie nieostrym. Pojęciu temu odpowiada zbiór nieostry o ustalonych granicach; zbiór ten nazwiemy denotacją pojęcia (terminu) relatywnie nieostrego.

Przykład. Rozważmy, jak przedtem, rzeczywistość $\mathfrak{G}$, do której uniwersum należy 25-letni Jan. Konceptualizacją wiedzy o Janie będzie któreś z następujących pojęć:

1° pojęcie całkowicie nieostre MŁODY, którego denotacją jest pole nieokreśloności, charakteryzowane podobnie jak rodzina $\mathsf{F}(M_{25}, \text{Jan})$, i złożone z wielu zbiorów niekoniecznie o tych samych granicach (jak np. M_1, M_3, M_4);

2° pojęcie nieostre MŁODY_k^l, którego denotacją jest pole nieokreśloności, złożone ze zbiorów nieostrych o tej samej granicy dolnej k i tej samej granicy górnej l; charakteryzowane jest ono zatem podobnie jak rodzina $\mathsf{F}'(M_{25}, \text{Jan}) = \{\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2\}$, złożona ze zbiorów nieostrych o tych samych granicach;

3° pojęcie relatywnie nieostre $\mathit{MŁODY}_k^l$, którego denotacją jest konkretny zbiór nieostry należący do denotacji pojęcia MŁODY_k^l, np. rodzina M_2, która jest elementem pola $\mathsf{F}'(M_{25}, \text{Jan})$.

Pokazaliśmy w ten sposób trzy różne sposoby (poziomy) ujmowania nieostrości pojęć. Można powiedzieć, że każdemu z nich odpowiadają różne tak zwane *rodziny* *znaczeniowe*, będące ich denotacją (por. Wittgenstein 1953, Pawłowski 1978 i 1988, Koj 1969 i 1988)[4]. Jest oczywiste, że te zasadnicze różnice w pojmowaniu nieostrości odzwierciedlają się w zasadniczych różnicach znaczeniowych terminów nieostrych. Znaczenia te, jak się zdaje, nie są dostatecznie dobrze uświadamiane przez użytkowników danego systemu znaków, w szczególności przez użytkowników języka, stosujących wyrażenia nieostre. Powoduje to, że odpowiedzi na postawione na wstępie pytania są dla nich niejednoznaczne lub nierozstrzygalne.

Na pytanie, czy wyrażenie

(*) Jan jest MŁODY

jest poprawnie użyte, gdy Jan ma 25 lat, nie istnieje poprawna odpowiedź, mająca charakter zdania logicznego, gdyż odpowiedź taka musiałaby być twierdząca lub przecząca, a zdanie (*) — zdaniem logicznym. Takim zdaniem (*) jednak nie jest, jako zdanie o nieokreślonym lub nieustalonym znaczeniu. Występujący w nim termin nieostry „MŁODY" nie jest właściwie nazwą w rozumieniu logicznym. Można go traktować jako *quasi-nazwę* i to wieloznaczną, jeśli nie ustalimy poziomu jej nieostrości. Może być ona całkowicie nieostra, nieostra lub relatywnie nieostra w zależności od tego, czy odpowiada jej pojęcie całkowice nieostre, nieostre lub relatywnie nieostre.

Przykład. Rozważamy rzeczywistość $\mathfrak{S}$, do której uniwersum należy Jan. Wiedzę całkowicie nieostrą o 25-letnim Janie, ze względu na WIEK, może reprezentować zdanie

(*) Jan jest MŁODY,

wiedzę nieostrą o Janie, ze względu na WIEK, może reprezentować na przykład zdanie

(*′) Jan jest $\text{MŁODY}^{\leq 30}_{<19}$,

zaś wiedzę relatywnie nieostrą o nim, ze względu na ten sam aspekt, na przykład zdanie

(**) Jan jest $\mathit{MŁODY}^{\leq 30}_{<19}$.

Denotacją terminu (odpowiadającego mu pojęcia) relatywnie nieostrego w zdaniu (**) jest np. zbiór nieostry M2, czyli rodzina wszystkich zbiorów $M_{<l}$ osób w wieku niewiększym od l, gdzie $l = 19, 20, 21, 22, \ldots, 30$.

Denotacją terminu (odpowiadającego mu pojęcia) nieostrego w zdaniu (*′) jest rodzina rodzin zbiorów nieostrych o takich samych granicach: $M_{<19}$ (granica dolna) i $M_{\leq 30}$ (granica górna), np. rodzina złożona z denotacji M_2 terminu relatywnie nieostrego występującego w zdaniu (**) oraz z denotacji jakiś innych terminów relatywnie nieostrych, np. rodziny $\mathsf{M}_1 = \{M_{<19}, M_{<25}, M_{\leq 30}\}$.

Denotacją terminu (odpowiadającego mu pojęcia) całkowicie nieostrego w zdaniu (*) jest rodzina rodzin zbiorów nieostrych o niekoniecznie tych samych granicach,

[4] Na możliwość istnienia związku proponowanego tu ujęcia z koncepcją T. Pawłowskiego, zwrócił mi uwagę Profesor Jerzy Pelc, za co Mu składam serdeczne podziękowanie.

wśród których znajdują się zbiory nieostre o tych samych granicach, a w szczególności denotacja M_2 terminu nieostrego występującego w zdaniu (*′).

Wyrażenie (**) jest zatem schematem, formą zdaniową, w której termin relatywnie nieostry „$MŁODY^{\leq 30}_{<19}$ " jest zmienną reprezentującą nazwy ostre o zakresach będących elementami denotacji M_2 tego terminu.

Wyrażenia (*′) i (*) są natomiast schematami form zdaniowych, w tym formy zdaniowej (**), w których terminy nieostre „$\mathrm{MŁODY}^{\leq 30}_{<19}$ " i „MŁODY" są zmiennymi reprezentującymi terminy relatywnie nieostre, w szczególności termin „$MŁODY^{\leq 30}_{<19}$ ".

Zdanie — forma zdaniowa typu (**) — zawierające termin relatywnie nieostry, czyli quasi-nazwę, reprezentuje jeden z trzech typów zdań:

(1) klasę zdań wyłącznie prawdziwych (gdyby Jan był w wieku «dolnym» — a więc posiadał nie więcej niż 18 lat);

(2) klasę zdań wyłącznie fałszywych (gdyby Jan nie był w wieku «górnym» — a więc gdyby przekroczł 30 lat) i

(3) klasę zdań prawdziwych lub fałszywych (gdyby Jan był w wieku brzegowym, a więc w wieku od 19 do 30 lat włączne).

Tak więc, gdy Jan ma k lat, to jest niewątpliwie *desygnatem* nieostrego terminu „$MŁODY^{l}_{k}$", gdzie k wskazuje granicę dolną, a l granicę górną jego wieku, nie jest z pewnością *desygnatem* tej quasi-nazwy, gdy przekroczył granicę l lat i jest *quasi-desygnatem* tej quasi-nazwy, gdy przekroczył granicę dolną wieku k lat, lecz nie przekroczył granicy górnej wieku l lat.

Gdy Jan jest desygnatem lub quasi-desygnatem terminu relatywnie nieostrego „$MŁODY^{l}_{k}$", możemy powiedzieć, że należy on do jego denotacji $M_k^{\,l}$ w pewnym stopniu. Stopień ten jest wyznaczony przez liczbę zbiorów dokładnych tego zbioru nieostrego, do których Jan należy; jest to liczba $1 - 1/n$, gdy Jan należy do n takich zbiorów, i $n > 1$, oraz liczba 1, gdy Jan należy do jednego takiego zbioru.

Uogólniając nasze rozważania możemy stwierdzić, że:

- Zbiór nieostry jest też zbiorem rozmytym w sensie Zadeha.
- Zbiór nieostry jest też multisetem — ponieważ posiada elementy wielokrotne (zob.: Blizard 1989).

W podanym wcześniej przykładzie 25-letni Jan był dwukrotnym elementem zbiorów M_3 (quasi-desygnatem quasi-nazwy „$MŁODY^{16-30}_{20}$ ") i M_4 (quasi-desygnatem quasi-nazwy "$MŁODY^{18-25}_{20}$ "), pięciokrotnym elementem zbioru nieostrego M_2 (quasi-desygnatem quasi-nazwy „$MŁODY^{\leq 30}_{<19}$ "), a tylko jednokrotnym elementem zbioru nieostrego M_1 (quasi-desygnatu quasi-nazwy „$MŁODY^{\leq 30}_{<19}$ "), chociaż zbiór ten posiada także elementy wielokrotne.

Ponadto, jeżeli granice wyznaczające zbiór nieostry zdefiniujemy odpowiednio jako *przybliżenia dolne* i *przybliżenia górne* każdego zbioru dokładnego wyznaczającego ten zbiór (zob.: Pawlak 1982, 1991)[5], to:

- Zbiór nieostry jest podzbiorem zbioru przybliżonego o tych granicach (zbiory przybliżone są rodzinami wszystkich zbiorów o tych samych przybliżeniach dolnych i tych samych przybliżeniach górnych).

Łatwo zauważyć, że:

- Zbiór przybliżony jest największym, w sensie inkluzji, zbiorem nieostrym pola nieokreśloności, złożonego ze zbiorów nieostrych o tych samych granicach, będących jednocześnie stosownymi przybliżeniami każdego elementu tych zbiorów.

5. Konceptualizacja wiedzy złożonej

Można zadać sobie pytanie, jakie pojęcia — a więc i jakie denotacje — odpowiadają *sumie, iloczynowi i negacji wiedzy* o obiekcie u rzeczywistości $\mathbb{R}$?

Suma i iloczyn wiedzy o obiekcie u rzeczywistości $\mathbb{R}$ są wyznaczone przez relacje (cechy) będące odpowiednio sumą, iloczynem dwóch relacji (cech) tej rzeczywistości, negacja wiedzy o obiekcie u ze względu na jej relację R_i jest wiedzą o tym obiekcie ze względu na dopełnienie: $R_i' = U - R_i$.

Jeśli całkowicie nieostrej lub nieostrej wiedzy o obiekcie u ze względu na relację (cechę) R_i odpowiada pojęcie o denotacji $\digamma\{R_i, u\} = \{V_s\}_{s<\omega}$, a wiedzy o obiekcie u ze względu na relację R_j odpowiada pojęcie o denotacji $\digamma(R_j, u\} = \{W_t\}_{t<\omega}$, to suma (*resp.* iloczyn) wiedzy o obiekcie u jest wiedzą, której odpowiada pojęcie o denotacji będącej rodziną sum (*resp.* iloczynów) wszystkich możliwych par zbiorów wybranych po jednym z denotacji $\digamma(R_i, u)$ i $\digamma(R_j, u)$. Oznaczmy przez $\square$ sumę wiedzy o obiekcie u, a przez $\otimes$ — iloczyn wiedzy o obiekcie u. Wtedy:

$$\{V_s\}_{s\leq\omega} \square \{W_t\}_{t<\omega} = \{V_s \cup W_t\}_{s<\omega,\, t<\omega},$$
$$\{V_s\}_{s\leq\omega} \otimes \{W_t\}_{t<\omega} = \{V_s \cap W_t\}_{s<\omega,\, t<\omega}.$$

Negacji (oznaczanej przez $\neg$) wiedzy całkowicie nieostrej o obiekcie u ze względu na relację R_i, wyznaczającej pojęcie o denotacji $\{V_s\}_{s<\omega}$ odpowiada wiedza, określająca pojęcie o denotacji zadanej wzorem:

$$\neg \{V_s\}_{s\leq\omega} = \{\mathrm{P}(U) - V_s\}_{s\leq\omega}.$$

Łatwo zauważyć, że:

- Klasa wszystkich pól nieokreśloności wiedzy, wraz z rodziną $\{\{\emptyset\}\}$ (zero tej klasy) i rodziną $\{\{\mathrm{P}(U)\}\}$ (jedynka tej klasy), ze względu na działania $\square$, $\otimes$ i $\neg$ na tych polach, tworzy algebrę Boole'a.

[5] Dolne przybliżenie zbioru jest definiowane jako suma sum klas abstrakcji (klas elementarnych) zadanej w U relacji równoważności, które zawierają się w tym zbiorze, zaś górne przybliżenie tego zbioru — jako iloczyn tych wszystkich sum klas abstrakcji, które zawierają ten zbiór.

Analogicznie można określić sumę, iloczyn i negację wiedzy relatywnie nieostrej. Gdy ustalimy, że granicami dolnymi zbiorów aproksymujących $V = \{R_i\}_{i \in I}$ oraz $W = \{R_j\}_{j \in J}$ złożonych z relacji (cech) rzeczywistości $\mathbf{R}$ są, odpowiednio, zbiory $\underset{\sim}{V}$ i $\underset{\sim}{W}$, a granicami górnymi tych zbiorów są odpowiednio zbiory $\sim V$ oraz $\sim W$, wówczas sumę, iloczyn i negację aproksymujących zbiorów V i W definiujemy następująco:

$$\{R_l\}_{l\in L} + \{R_j\}_{j\in J} = \{R_i \cup R_j\}_{l\in L, j\in J},$$
$$\{R_i\}_{l\in L} \circ \{R_j\}_{j\in J} = \{R_i\} \cap \{R_j\}_{l\in L, j\in J},$$
$$\approx \{R_i\}_{l\in L} = \{U - R_i\}_{l\in L}.$$

Granice sumy (iloczynu) zbiorów aproksymujących V i W nie muszą być sumą (iloczynem) ich granic $\underset{\sim}{V}$ i $\underset{\sim}{W}$ czy $\sim V$ i $\sim W$. Granicą dolną takiej sumy jest iloczyn $\bigcap \{R_l \cup R_j\}_{l\in L, j\in J}$ zawierający sumę $\underset{\sim}{V} \cup \underset{\sim}{W}$ kresów dolnych zbiorów V i W. Granicą górną tych zbiorów jest suma kresów górnych tych zbiorów, czyli zbiór $\sim V \cup \sim W$, ponieważ o zbiorach aproksymujących założyliśmy, że są one pokryciami kresu górnego (suma zbiorów aproksymujących jest zarazem pokryciem swego kresu górnego). Granicą dolną iloczynu zbiorów aproksymujących V i W jest iloczyn ich kresów dolnych, czyli zbiór $\underset{\sim}{V} \cup \underset{\sim}{W}$; natomiast granicą górną — zbiór $\bigcup \{R_l \cap R_j\}_{l\in L, j\in J}$, zawarty w iloczynie granic tych zbiorów, czyli w zbiorze $\underset{\sim}{V} \cap \underset{\sim}{W}$. Iloczyn zbiorów aproksymujących jest zatem pokryciem swego kresu górnego.

Granicą dolną negacji zbioru aproksymującego zbiór V jest zbiór $U - \sim V = \sim V'$, zaś granicą górną tego zbioru jest zbiór $U - \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{V}'$. Negacja zbioru nieostrego jest przy tym pokryciem jego granicy górnej $\underset{\sim}{V}'$.

Działania na zbiorach aproksymujących są zatem dobrze określone w klasie wszystkich takich zbiorów. Łatwo zauważyć, że:

- Klasa wszystkich zbiorów aproksymujących, łącznie z rodziną $\{\emptyset\}$ (zero tej klasy) i rodziną $\{U\}$ (jedynka tej klasy), ze względu na działania $+$, $\circ$ i $\sim$ tworzy algebrę Boole'a.

Sumie (*resp.* iloczynowi) dwojakiej relatywnej wiedzy nieostrej o obiekcie u z uniwersum U, ze względu na określone dwie relacje (cechy) odpowiada zatem pojęcie, którego denotacja jest sumą (*resp.* iloczynem) denotacji obu pojęć wyznaczonych przez tę dwojaką wiedzę.

- Suma takiej wiedzy może być wiedzą pełną, gdy odpowiadające tej wiedzy pojęcie ma denotację $\{U\}$, identyfikowaną z całym uniwersum U; ma to miejsce, gdy mamy do czynienia z wiedzą wyznaczoną przez sprzeczne cechy.

Podobnie:

- Wiedza wyznaczona przez iloczyn wiedzy relatywnie nieostrej ze względu na dwie sprzeczne cechy jet wiedzą pustą,'a ma to miejsce wtedy, gdy odpowiadające jej pojęcie ma denotację $\{\emptyset\}$, identyfikowaną ze zbiorem pustym.

Zauważmy też, że:

- Suma wiedzy relatywnie nieostrej ze względu na dwie cechy przeciwne R_i i R_j ($R_i \cap R_j = \emptyset$ i $R_i \cup R_j \neq U$) nie jest wiedzą pełną.

Podobnie:

- Iloczyn wiedzy relatywnie nieostrej ze względu na cechy przeciwne nie jest wiedzą pustą.

Przykład. Rozważmy rzeczywistość $\mathfrak{S}$ ze względu na WIEK i ustalmy, że relatywnie nieostrą wiedzą o Janie, ze względu na cechę M_{25} posiadania 25 lat, jest przyporządkowanie Janowi zbioru nieostrego M_4, podczas gdy wiedzą relatywnie nieostrą ze względu na cechę M_{30} posiadania 30 lat jest przyporządkowanie mu zbioru nieostrego M_3. Suma $\mathsf{M}_4 + \mathsf{M}_3$ nie jest wtedy zbiorem $\{U\}$, a iloczyn $\mathsf{M}_4 \circ \mathsf{M}_3$ nie jest zbiorem $\{\emptyset\}$.

Ze względu na poruszony w pracy problem istotna jest odpowiedź na następujące pytanie: Czy poprawne jest użycie zdania (*), gdy górną granicę młodości ustala się raz na 30 lat, drugim razem na 25 lat? Gdy Jan ma 30 lat, może on być wtedy MŁODYM i nie-MŁODYM, gdy raz „MŁODY" stanowi quasi-nazwę „MŁODY^{30}", innym razem quasi-nazwę „MŁODY^{25}". Podobnie 25-letni Jan może nie być wtedy ani MŁODYM, ani nie-MŁODYM. Widać tu, że termin „MŁODY" funkcjonuje wówczas jako zmienna reprezentująca różne quasi-nazwy, które z kolei reprezentują nazwy ostre.

Płynie stąd wniosek, że:

- Użycie nazwy nieostrej w różnych jej reprezentacjach (a więc i znaczeniach) może być źródłem zasadniczych trudności i prowadzić do nieporozumień.

6. Refleksje końcowe

Przedstawimy zasadnicze założenia i wnioski, do których prowadzi zarysowana tu logiczna teoria nieostrości.

- Określiliśmy dwa podstawowe typy nieostrości:

(a) całkowitą nieostrość lub nieostrość,

oraz

(b) nieostrość relatywną.

- Pojęcie nieostrości określiliśmy przy tym jako pewną własność, odpowiadającą wiedzy podmiotu, odkrywającego obiektywną rzeczywistość, a więc na poziomie epistemicznym.
- Wiedza nieostra jest reprezentowana w języku, czy w innych systemach reprezentacji wiedzy, w postaci wyrażeń zawierających terminy nieostre i wyrażających nieostrość typu (a) lub (b).
- Terminy nieostre są dwojakiego rodzaju:

(i) całkowicie nieostre lub nieostre,

bądź

(ii) relatywnie nieostre.

- Terminy całkowicie nieostre lub nieostre denotują całe pola nieokreśloności, będące rodzinami złożonymi z rodzin podzbiorów uniwersum, zwanych zbiorami aproksymującymi to pole; są to zbiory aproksymowane przez ich kresy (ze względu na inkluzję), zwane „granicami", będące zarazem pokryciami ich granic górnych.
- Gdy zbiory aproksymowane są co najmniej dwuelementowe, to są one zbiorami nieostrymi o granicach wyznaczonych przez ich kresy.
- Termin relatywnie nieostry denotuje zbiór nieostry o ustalonych granicach i jest traktowany jako quasi-nazwa czy też zmienna nieostra reprezentująca nazwy ostre, których denotacje tworzą ten zbiór nieostry.
- Termin nieostry czy też całkowicie nieostry może być traktowany jako quasi-quasi-nazwa, albo jako zmienna nieostra reprezentująca quasi-nazwy, czyli terminy relatywnie nieostre.
- Wyrażenia relatywnie nieostre, to jest wyrażenia zawierające nazwy relatywnie nieostre, mogą być traktowane jako formy zdaniowe zawierające zmienne nieostre; wyrażenia takie reprezentują zatem zdania prawdziwe lub fałszywe, same takimi nie będąc, jak np. wyrażenie:

(**) $$\text{Jan jest } \mathit{MŁODY}^{\leq 30}_{<19}\,.$$

- Wyrażenia całkowicie nieostre lub nieostre, to jest wyrażenia zawierające terminy całkowicie nieostre lub nieostre, czyli quasi-quasi-nazwy, mogą być traktowane jako schematy wyrażeń relatywnie nieostrych, czyli schematy form zdaniowych zawierających terminy nieostre.

Powyższe ustalenia pozwalają sformułować następujące wnioski:

- Wyrażenia relatywnie nieostre spełniają wszystkie prawa klasycznej logiki. Jest tak, ponieważ podstawiając w prawach klasycznego rachunku zdań za zmienne zdaniowe te wyrażenia (formy zdaniowe) otrzymujemy takie wyrażenia (formy zdaniowe), które reprezentują wyłącznie zdania prawdziwe. Podstawiając w prawach klasycznego rachunku kwantyfikatorów za zmienne predykatywne zmienne predykatywne, odpowiadające terminom relatywnie nieostrym, czyli zmiennym nieostrym, otrzymujemy wyłącznie prawdziwe wyrażenia relatywnie nieostre, czyli takie formy zdaniowe zawierające terminy nieostre, które reprezentują wyłącznie zdania prawdziwe.
- Wyrażenia całkowicie lub prawie całkowicie nieostre, jako schematy wyrażeń relatywnie nieostrych, spełniających wszystkie prawa logiki klasycznej, same je spełniają.
- Wyrażenia «mieszane», zawierające co najmniej jeden termin relatywnie nieostry i co najmniej jeden termin całkowicie nieostry lub nieostry i, ewentualnie, zwykłe zdania logiczne, spełniają wszystkie prawa logiki klasycznej.

Powyższe wnioski usasadniają stanowisko, iż:

- Dla uchwycenia nieostrości, analizowanej w aspekcie językowym, należy rozszerzyć klasyczną logikę dwuwartościową, nadbudowując nad nią, w naturalny sposób, klasyczną logikę wyrażeń relatywnie nieostrych, a nad nią klasyczną logikę wyrażeń całkowicie nieostrych.

Te *klasyczne logiki wyrażeń nieostrych* nie są, oczywiście logikami dwuwartościowymi, gdyż odpowiedniki spójników logicznych nie są ekstensjonalne: dwie formy zdaniowe należące do klasy form reprezentujących niekiedy zdania prawdziwe a niekiedy fałszywe, połączone np. spójnikiem alternatywy, mogą dać formę zdaniową tej klasy lub formę zdaniową reprezentującą wyłacznie zdania prawdziwe (por.: Słupecki i in. 1976).

Takie rozszerzenie logiki klasycznej — czyli logika zdań zawierających zdania nieostre, ma intrpretację w rozszerzonej algebrze zbiorów — algebrze zbiorów zawierającej zwykły rachunek zbiorów wraz z algebrą Boole'a zbiorów aproksymujących i algebrą Boole'a pól nieokreśloności.

Zaproponowane tu formalne podejście do problemu nieostrości nawiązuje do klasycznego nurtu badań, który reprezentuje na przykład K. Fine (1975) (zob. też: Cresswell 1973). Przedstawiane stanowisko zaliczane jest do konserwatywnych (zob.: Muszyński 1988) nurtów badań nad nieostrościa, lecz, jak się zdaje, dobrze oddaje ono istotę tego, jak pracuje nasz mózg posługując się informacją nieostrą.

• Logiką, która leży u podstaw badań nad nieostrością jest logika klasyczna.

LITERATURA CYTOWANA

J.L. AUSTIN (1961), „How to Talk", [w:] J.O. Urmson; G.J. Warnock (eds.), *Philosophical Papers*, Oxford.

W.D. BLIZARD (1989), „Multiset Theory", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 30, no 1.

M.J. CRESWELL (1973), *Logics and Languages*, Methuen, London.

K. FINE (1975), „Vagueness, Truth and Logic", *Synthese*, vol. 30, no 3-4.

J. JANAS-KASZCZYK (1988), „Zmiana struktur ontycznych a nieostrość. Próba ugruntowania ontologicznego aspektu nieostrości na przykładzie poglądów H. Bergsona", [w:] (Muszyński 1988).

T. KUBIŃSKI (1958), „Nazwy nieostre", *Studia Logica*, vol. 7.

T.S. KUHN (1962), *The Structure of Science Revolution*, Chicago, Polskie wydanie: *Struktura rewolucji naukowych*, Warszawa 1968.

L. KOJ (1969), „On Defining Meaning Families", *Studia Logica*, vol. 25; Polskie tłumaczenie [w:] (Muszyński 1988).

W. MARCISZEWSKI (1994), *Logic from a Rethorical Point of View*, Berlin.

Z. MUSZYŃSKI (red.) (1988), *O nieostrości*, Lublin.

Z. PAWLAK (1982), „Rough sets", *International Journal of Computer and Information Sciences*, vol. 11.

Z. PAWLAK (1983), *Systemy informacyjne. Podstawy teoretyczne*, Warszawa.

Z. PAWLAK (1991), *Rough Sets -Theoretical Reasoning About Data*, Dordrecht.

Z. PAWLAK (1992), *Wiedza z perspektywy zbiorów przybliżonych*, Warszawa.

T. PAWŁOWSKI (1978), „Rodziny znaczeń i ich definiowanie", *Studia Filozoficzne*, nr 2.

T. PAWŁOWSKI (1988), „Rodziny znaczeń", [w:] (Muszyński 1988).

J. PELC (1971), *Studies in Functional Logical Semiotics of Natural Languages*, The Hague.

M. POLANYI (1962), *Personal Knowledge. Towards a Post Critical Philosophy*, London.

M. PRZEŁĘCKI (1964), „Z semantyki pojęć otwartych", *Studia Logica*, vol. 15; Przedruk [w:] *Filozofia Nauki* nr 2-3, vol. 1 (1993).

B. RUSSELL (1923), „Vagueness", *The Australasian Journal of Psychology and Philosophy*, vol. 1.

J. SŁUPECKI, K. HAŁKOWSKA, K. PIRÓG-RZEPECKA (1976), *Logika matematyczna*, Warszawa (wyd.2, 1993).

L. WITTGENSTEIN (1953), *Philosophical Investigations*, Oxford.

U. WYBRANIEC-SKARDOWSKA (1994 a), „Status informacji przybliżonej i problem nieostrości", [w:] M. Omyła (red.), *Nauka i język*, Warszawa.

U. WYBRANIEC-SKARDOWSKA (1994 b), „A Logical Explication of Incomplete and Uncertain Information", [w:] V.S. Alagar, S. Bergler, F.Q. Dang (red.), *Incompletness nd Uncertainy in Information Systems*, London 1994.

U. WYBRANIEC-SKARDOWSKA (1995), „Logic in View of Imprecise Information", *Proceedings of the Fifth Congress of the International Association for Semiotic Studies, June 12-18, 1994, Berkeley, California, USA*, New York.

L.A. ZADEH (1965), „Fuzzy Sets", *Information and Control*, vol. 8.