2024 届本科生学士学位论文 学校代码：10269

華東師範大學
East China Normal University

本科生毕业论文

认知授权的逻辑

The Logic of Epistemic Entitlement

姓 名：祝茂原

学 号：10201170428

学 院：哲学系

专 业：哲学

指导教师：魏宇

职 称：讲师

2024 年 4 月

华东师范大学学位论文诚信承诺

本毕业论文是本人在导师指导下独立完成的，内容真实、可靠。本人在撰写毕业论文过程中不存在请人代写、抄袭或者剽窃他人作品、伪造或者篡改数据以及其他学位论文作假行为。

本人清楚知道学位论文作假行为将会导致行为人收到不授予/撤销学位、开除学籍等处理（处分）决定。本人如果被查证在撰写本毕业论文过程中存在学位论文作假行为，愿意接受学校依法作出的处理（处分）决定。

承诺人签名：　　　　　　　　　　　　　　　　日期：　　　　年　　月　　日

华东师范大学学位论文使用授权说明

本论文的研究成果归华东师范大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本学位论文作者和指导教师完全了解华东师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权华东师范大学可以将论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索、交流，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编本学位论文。

保密的毕业论文（设计）在解密后应遵守此规定。

作者签名：　　　　　　　　导师签名：　　　　　　　　日期：　　　　年　　月　　日

目录

认知授权的逻辑

摘要：

本文发展了一类新的核证逻辑——认知授权的逻辑。认知授权的逻辑借用了知识论中认知授权的概念，将形如 $\tau:\phi$ 的核证公式解读为：理由 τ 授权认知者相信 ϕ。认知授权的逻辑中，公式 $\tau:\phi$ 为真，当且仅当 ϕ 在被 τ 授权设想的所有可能世界中为真。相较核证逻辑的标准认知语义，Fitting 模型中公式 $\tau:\phi$ 为真，当且仅当 ϕ 在所有可设想的可能世界中为真，且满足证据条件：认知者所处的认知状态 $w\in\mathcal{E}(\tau,\phi)$。因此，若 w 并非模型中死点，w 的点模型无法同时满足形如 $\tau:\phi$ 和 $\tau':\neg\phi$ 的公式。因此标准核证逻辑无法刻画认知者出于不同的理由产生冲突的信念。而认知授权的逻辑可以解决这个问题，在 w 上 τ 和 τ' 分别授权认知在两组不相交的可能世界的集合上相信 ϕ 和 $\neg\phi$。$\mathcal{M},w\Vdash\tau:\phi$ 当且仅当对任意 wRv 有 $v\in Ent(\tau,w)$，$\mathcal{M},v\Vdash\phi$。文中这样的认知授权被公理化为授权的逻辑 J_{Ent}，并验证其公理的有效性；并找出了 J_{Ent} 的典范模型，说明其完全性。最后尝试扩展 J_{Ent}，探索信念授权逻辑 J_{Ent}D4 和知识授权逻辑 J_{Ent}T4。

关键词：核证逻辑，认知逻辑，认知授权，显式知识，可设想性

The Logic of Epistemic Entitlement

Abstract:

This paper develops a new class of justification logic, the logic of epistemic entitlement. The logic of epistemic entitlement invokes the notion of epistemic entitlement in epistemology, and interprets a justification formula in the form of $\tau : \phi$ as follows: the warrant τ entitles the agent to believe ϕ. In the logic of epistemic entitlement, the formula $\tau : \phi$ is true if and only if ϕ is true in all possible worlds entitled to be conceived by τ. In contrast to the standard epistemic semantics of justification logic, the formula $\tau : \phi$ in Fitting's model is true if and only if ϕ is true in all possible worlds that can be conceived of and satisfies the evidential condition: the epistemic state $w \in \mathcal{E}(\tau, \phi)$ that the epistemic agent is in. Thus, if w is not a dead point in the model, the point model of w cannot satisfy both formulas of the form $\tau : \phi$ and $\tau' : \neg\phi$. Thus standard justification logic cannot characterize the conflicting beliefs of agents for different warrants. Instead, the logic of epistemic entitlement solves this problem by entitling agents to believe ϕ and $\neg\phi$ on two disjoint sets of possible worlds on w, τ and τ', respectively. $\mathcal{M}, w \Vdash \tau : \phi$ if and only if $\mathcal{M}, v \Vdash \phi$ for every $v \in Ent(\tau, w)$ with wRv . Such an epistemic entitlement in the paper is axiomatized into the logic J_{Ent} and the validity of its axioms is verified. And a canonical model of J_{Ent} is established to prove its completeness. Finally, extensions of J_{Ent} are attempted to explore the logic of entitlement of belief$\mathsf{J}_{Ent}\mathsf{D4}$ and logic of entitlement of knowledge$\mathsf{J}_{Ent}\mathsf{T4}$.

Keywords: justification logic, epistemic logic, epistemic entitlement, explicit knowledge, conceivability

一、背景

在日常生活中，一个人经常会出于不同的理由地同时持有相互冲突的想法或意见。当她基于这些相互冲突的想法或意见行动时，这些想法或意见就承担了信念的作用。考虑下述情景：

> 大流行期间，王乙接种过一款据说理论上很强的疫苗（t），因此相信自己不太可能得新冠（$\neg p$），于是很积极地配合防疫人员进行核酸采样。同时，她也知道新冠传染性极强且毒株多变（s），使得她相信自己可能会感染新冠（p），于是时常服用莲花清瘟胶囊。

在此情境中，王乙相信 p（即，Bp）的同时也相信 $\neg p$（即，$B\neg p$），她的行动也能佐证她的确持有这些信念。[1]但遗憾的是，信念逻辑 KD4 告诉我们，王乙的信念是不一致的：D-公理 $Bp \to \neg B\neg p$ 经由 Bp 肯定前件得到 $\neg B\neg p$，与 $B\neg p$ 矛盾。这违反了我们对信念系统一致性的要求。

在现实中，因为我们没有忽视王乙所持有的不同理由[2]，她相信 p 的同时也相信 $\neg p$ 是可理解的。王乙出于 s 相信 p（即，$s : p$），同时也出于 t 相信 $\neg p$（即，$t : \neg p$）。在一些不要求事实性（factivity）的核证逻辑（justification logic）中，公式集 $\{s : p, t : \neg p\}$ 是一致的。

在核证逻辑的发展中，Artemov（以及 Mkrtychev）的基本模型（basic model）和模块模型（modular model）为核证项提供了本体论解释 $* : JTm \mapsto 2^{Fm}$[5-7]，核证公式的真值条件如下：

$$(\tau : \phi)^* = 1 \text{ 当且仅当} \phi \in \tau^*，$$

但无法自然地与基于可能世界框架的认知逻辑衔接。Fitting 为核证逻辑提供了基于可能世界的认知语义 $\mathcal{M} = (W, R, \mathcal{E}, V)$[8]，借助证据函数 $\mathcal{E} : JTm \times Fm \mapsto 2^W$ 来解释认知证成（epistemic justification）：

$$\mathcal{M}\ w \Vdash \tau : \phi \text{ 当且仅当 } \begin{cases} \text{模态条件：} \mathcal{M}, v \Vdash \phi \text{ 对任意} v \in W\text{，有} wRv\text{，且} \\ \text{证据条件：} w \in \mathcal{E}(\tau, \phi)\text{。} \end{cases}$$

---

[1]很多知识论研究者支持不一致的信念存在：语境主义（epistemic contextualism）者认为信念的真值标准是语境敏感的；Levy 认为人们会出于对不同证据的理性反应而产生冲突的信念[1]；片段主义者认为人的信念系统是片段性（fragmentation）的，不同的片段之间逻辑独立[2]；Yalcin 认为应当放弃要求模态知识具有事实性[3]；Kyburg 也通过彩票悖论展示了人们似乎会合理地接受矛盾的信念[4]。

[2]证据主义的相对主义者会赞同这种看法，因为 Bp 与 $B\neg p$ 各自语境中的证据集不同。

Fitting 模型对形如 $\tau:\phi$ 的核证公式的真值条件有两项要求，分别是模态条件与证据条件，前者要求认知者完全相信 ϕ，后者要求认知者所处状态 w 是一个 τ 能够作为 ϕ 的证成的认知状态。

但这种模型并不契合于王乙的遭遇。王乙相信 p 的同时也相信 $\neg p$，但 p 和 $\neg p$ 对王乙而言都不是完全信念（full belief）而是部分的信念（partial belief）[1]。也就是说，无论 p 还是 $\neg p$，它们都没有充斥所有可设想的认知状态，这也就不适合 Fitting 模型中模态条件的要求。如果用 Fitting 模型来分析 $s:p$ 和 $t:\neg p$，可见

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\ w \Vdash s:p \text{ 当且仅当 } & \mathcal{M},v \Vdash p \text{ 对任意} wRv\text{，有} v\in W\text{，且} \\
& w\in\mathcal{E}(s,p)\text{。} \\
\mathcal{M}\ w \Vdash t:\neg p \text{ 当且仅当 } & \mathcal{M},v \Vdash \neg p \text{ 对任意} wRv\text{，有} v\in W\text{，且} \\
& w\in\mathcal{E}(t,\neg p)\text{。}
\end{aligned}
$$

只要王乙能设想的 w 以外的认知状态，$s:p$ 和 $t:\neg p$ 的模态条件就会导致矛盾——在那个可设想的认知状态上有 $p\wedge\neg p$。

这并不意味着我们要放弃模态条件和接受豁免于一些逻辑规则的不可能世界[2]，而是要求我们去思考 Fitting 模型是如何解释认知证成的。Artemov 多次指出，证据函数 $\mathcal{E}$ 是一种觉知（awareness）函数[12]，使得有证成的知识（或信念）才能被我们觉察。相似地，基本模型中对证成的解释，也只是关于知识（或信念）的信念。如 C. Wright 所言“被怀疑论质疑的不是你是否持有知识或被证成的信念，[…]，而是我们是否有权去宣称这些知识和被证成的信念[13]。”这表明，在现有的核证逻辑的语义中，核证（证成）并没有参与到知识（或信念）的形成中。形如 $\tau:\phi$ 的公式，

1. 无法表达“认知者出于 τ 的理由持有信念 ϕ”；
2. 它仅仅在表达“认知者出于 τ 的理由，觉察到她持有信念 ϕ”。

而王乙所持有的 $s:p$ 和 $t:\neg p$ 显然在说，s 和 t 分别是信念 p 和 $\neg p$ 生成的担保（warrant）[3]。即，对形如 $\tau:\phi$ 的公式而言，τ 为认知者提供了认知授权（epistemic entitlement），它授权认知者只需要考虑一些可通达的认知状态，是否相信 ϕ 仅取决于这些状态中 ϕ 的真值情况。

认知授权将在第三章中进一步说明。本文的目的就是为认知授权提供逻辑。

[1] “在 [Hume] 看来，部分的信念是心灵将其能力平均分配给不同选项（distinct alternatives）的结果[9]。”

[2] 不可能世界，详见[10-11]。

[3] 本文中不区分“认知理由”和“认知担保”的区别。

二、回顾认知逻辑

最早的带有认知解释的演绎逻辑系统由 von Wright 提出时[14]，就已经采用了模态逻辑的研究进路。Hintikka 发展了知识和信念的形式语义[15]，为认知逻辑的语义提供了可能世界的框架。

（一） 认知逻辑的演绎系统

Von Wright[14]提出的认知系统包含以下模态公理：

K-公理　$K(\phi \to \psi) \to (K\phi \to K\psi)$　，演绎闭合原则；

T-公理　$K\phi \to \phi$　，知识的事实性。

以及模态规则：

N-规则　从 $\vdash \phi$ 推得 $\vdash K\phi$　，逻辑真理闭合。

其中模态词 K 代表知识，$K\phi$ 意为"知道 ϕ"。Von Wright 还考虑了如下广受讨论的模态公理的认知读法：

4-公理　$K\phi \to KK\phi$　，知识的正内省性；

5-公理　$\neg K\phi \to K\neg K\phi$　，知识的负内省性。

尽管 von Wright 认为积极内省公理是可疑的，消极内省公理是绝对不可接受的，带有这两条公理的 S4 与 S5 系统是被研究最多的知识逻辑。

Hintikka 认为知识的可替代性关系是自反且传递的（见下节二），在模态逻辑中可以被归为 T-公理和 4-公理。对于信念的可替代性关系，Hintikka 认为是传递的和序列的，其结果是 KD4 系统的语义。它的公理系统（需将对应的 $K\phi$ 重新标记为 $B\phi$）由 K-公理、4-公理和下述的 D-公理组成[1]：

D-公理　$B\phi \to \neg B\neg\phi$　，信念的一致性。

除模态公理与规则外，认知逻辑的演绎系统还包含所有的经典逻辑重言式与 MP-规则。

（二） 认知逻辑的可能世界语义

Hintikka[15]为认知概念提供了简单直接的语义分析。给定认知态度，即知识（或信念）；和一个不确定她的认知态度的认知者。她讨论自己的态度时，就是在假设一个认知状态（我们无妨把它称为可能世界）的集合，然后将她自己的认知状态（世

[1]在知识的逻辑中，知识系统的一致性已由 T-公理保障。

界）连接到集合中的每个世界 w。于是可能世界的集合就被分为了两部分：一部分是可替代的，因为对认知者来说，这些 w 与她自己的世界是不可分辨的；剩下的世界则是另一部分。

因此，认知者相信 p 的情况，就是说 p 的情况也在所有那些可替代的世界中。一个世界与它的可替代世界间的关系，就是（认知）替代性关系（alternateness relations）。认知替代性关系体现了认知态度持有者的可设想能力 (conceivabilities)。Hintikka 认为知识的可替代性关系是自反且传递的，信念的可替代性关系是传递的和序列的。

不区分 $K\phi$ 和 $B\phi$ 时，我们用 $\Box\phi$，来表示认知者对 ϕ 知道（或相信）的态度。认知逻辑的主流框架由 Hintikka 给出[15]，引入了可能世界模型。

定义 2.1 (可能世界模型) 可能世界模型 $\mathcal{M} = (W, R, V)$，由框架 (W, R) 和函数 V 组成，其中

1. $W \neq \emptyset$，是非空的可能世界集合，反映所有认知状态；
2. $R \subseteq W \times W$，是一些可能世界间二元关系的集合，反映认知状态间的可替代关系；
3. $V : Prop \mapsto 2^W$，是命题字母的赋值函数，说明原子公式在哪些可能世界上为真。

定义 2.2 (真值条件) 对模型 $\mathcal{M} = (W, R, V)$，我们用 $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$ 表示认知逻辑公式 ϕ 在可能世界 $w \in W$ 中为真，其真值条件如下：

1. 对 $p \in Prop$，$\mathcal{M}, w \Vdash P$ 当且仅当 $w \in V(p)$（，$V(\perp) = \emptyset$）；
2. $\mathcal{M}, w \Vdash \neg\phi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w \nVdash \phi$；
3. $\mathcal{M}, w \Vdash \phi \to \psi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w \nVdash \phi$ 或 $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$；
4. $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\phi$ 当且仅当对任意 wRv 有 $v \in W$（即 $(w, v) \in R$ 的缩写），$\mathcal{M}, v \Vdash \phi$。

其他命题连接词的真值条件也可由此定义。

（三） 逻辑全知问题

认知逻辑的模态逻辑研究进路被认为带有逻辑全知（the logical omniscience）的特征[16]。逻辑全知问题“不只是单个公理或规则的问题，甚至不只是认知逻辑的模态

方法的问题”，而是关于一个认知系统——如何把握理性认知者的逻辑推理能力，同时避免“不切实际的理想结果”——的困难[17]。

逻辑全知问题可以通过以下规则很好地体现，所有这些规则从前文的演绎认知系统和可能世界语义中推导出，但它们都超出了平常的认知者的推理能力：

从 $\vdash \phi$ 推出 $\vdash K\phi$	逻辑真理闭合；
从 $\vdash \phi \to \psi$ 推出 $\vdash K\phi \to K\psi$	逻辑后承闭合；
从 $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$ 推出 $\vdash K\phi \leftrightarrow K\psi$	逻辑等价闭合。

从知识论的角度看这些规则，仿佛认知者是逻辑全知的——祂知道所有的逻辑真理、所有已知的逻辑后果和所有与已知逻辑等价的命题。

为什么平常的认知者不具备逻辑全知的推理能力呢？一个很现实的原因是，我们对知识的推理并不完全取决于它在所有可设想的认知情景中的真假，也取决于知识依据的理由。例如，一个古人在黎明时指着天上最后一颗星星，

1. 她知道启明星就是这颗星星，理由是它是黎明时天空中仅剩的一颗星星；
2. 事实上，启明星、长庚星都是同一颗行星（即金星，虽然古人们都不清楚这件事）；
3. 她并不知道长庚星就是这颗星星。因为“它是黎明时仅剩的一颗星星”构不成她相信长庚星是这颗星星的理由（它是黄昏时浮现的第一颗星星）。

上述的例子中，接受逻辑等价的命题的理由不同避免了逻辑全知的出现。通俗地说，让我们知道一件事情的理由就是证成（justification）。所以我们可以尝试把具体的证成加入到认知逻辑中，将“认知者以 t 为理由知道 ϕ”记作“$\tau : \phi$”；将“___ 就是这颗星星”记作谓词“$S(\_)$”；将“它是黎明时天空中仅剩的一颗星星”记作证成 α。事实上，启明星 $=$ 长庚星，则根据莱布尼茨律 [1] 有 S(启明星) $\leftrightarrow$ S(长庚星)。对这位古人而言，她接受 $\alpha : S$(启明星) 而非 $\alpha : S$(长庚星)，从而避免了知识逻辑的逻辑等价闭合。

这也就引出了第四章的主要内容——核证逻辑。

[1]莱布尼茨律的一侧——同一的不可分辨性——的二阶写法：$\forall x \forall y(x = y \to \forall P(P(x) \leftrightarrow P(y)))$。

三、认知授权

认知授权的概念来自 C.Wright 和 Burge[18]：前者认为我们有非证据性的权利去相信一些基岩（cornerstone）命题；后者认为认知授权是与证成不同种类的理由（warrants），证成来自理性由命题构成，认知授权则是一些更直接的非命题的理由。虽然二者对认知授权的用法大相径庭，共同之处在于“特定的理由为接受某些命题提供权利。”认知授权在本文中的具体用法将在下文中给出。

（一） 从“可设想”到“有权去设想”

Hintikka 认为，认知状态间的可替代关系体现认知者的可设想能力。当思考命题 p，如果缺乏必要的信息，我们会去设想两种可替代的认知状态，来分别对应 p 的不同真假情况（如图3-1左侧）。这种状态下，认知者无法相信 p。而当信息充足时，她就能确定 p 的真假情况，从而选择相信 p 或 $\neg p$。其中的原因是，充足的信息允许认知者去放弃设想一些认知状态，当剩下的认知状态中命题 p 的真假情况都相同，她就获得了确定的信念。而认知授权是一种认知特权：当 p 得到特定授权时，认知者就有权只设想一些特定的 p 为真的认知状态。

我们可以借用 Stalnaker 对日常语言中的条件句[1]“如果 p，那么 q”（$p > q$）的分析[19] 来理解这个过程

> 考虑一个可能世界其中 p 是真的，且这个可能世界与现实世界的其他差异最小。“如果 p，那么 q”是真的（或假的），仅当 q 在这个可能世界中为真（假）。

那么，我们也可以推广出条件信念，形如“如果 ϕ，那么 ψ”（$\phi : \psi$，即 $B(\phi > \psi)$ 的缩写，其中 ϕ 不是 $\perp$）的真值条件，

$$M, w \Vdash \phi : \psi \text{ 当且仅当对任意} wRv \text{ 有} v \in \{u \mid M, u \Vdash \phi\}, M, v \Vdash \psi\text{。}$$

换言之，认知者相信“如果 ϕ，那么 ψ”，即 ψ 在所有可设想的 ϕ 为真的认知状态中为真。认知者不必考察所有可设想的认知状态，她只需考察 ϕ 所授权的那些。

上述有条件地相信，可以视为有授权地相信的特殊情况。在条件信念（形如 $\phi : \psi$）中：

1. 认知授权的来源（理由），由条件句前件 ϕ 以命题的方式给出；

[1]Stalnaker 认为条件句“如果 p，那么 q”（$p > q$）与实质蕴涵式“p 蕴含 q”（$p \to q$）不同。

2. ϕ 所授权的认知状态集合 $W_\phi = \{u \mid M, u \Vdash \phi\}$，依据 ϕ 的真值情况给出。

而在一般的认知授权中（形如 $\tau : \phi$），认知授权的来源并非由命题来表征，因此理由不需要由命题的方式给出。比如，在亲知知识（信念）中，认知授权却是通过知觉、记忆或阅历等非命题的途径获得[18]。因此，

1'. 认知授权的来源，直接由理由 τ 表示。

其中 $\tau \in JTm$，在核证逻辑中，这样的 τ 被视为核证项而非命题。因为 τ 不具有命题的形式，所以 τ 所授权的认知状态集合 W_τ 便不再需要考虑真值情况的要求。

（二） 可能世界上的认知授权

形如 $\tau : \phi$ 的公式读作“理由 τ 授权认知者接受信念 ϕ”。我们尝试用一种可能世界模型 $\mathcal{M}' = (W, \{W_\tau\}_{\tau \in JTm}, R, V)$ 公式 $\tau : \phi$ 提供语义。

定义 3.1 (认知授权的玩具模型) $\mathcal{M}' = (W, \{W_\tau\}_{\tau \in JTm}, R, V)$，其中 (W, R, V) 与定义2.1中相同。$\{W_\tau\}_{\tau \in JTm}$ 是由理由集 JTm 选定的 W 的子集的集合，表示被特定理由所授权的认知状态集合。

定义 3.2 (真值条件) 对模型 $\mathcal{M}' = (W, \{W_\tau\}_{\tau \in JTm}, R, V)$，我们用 $\mathcal{M}', w \Vdash \phi$ 表示认知认知公式 ϕ 在可能世界 $w \in W$ 中为真，其真值条件第 1–3 项与定义2.2相同，第 4 项换为

4'. $\mathcal{M}', w \Vdash \tau : \phi$ 当且仅当对任意 wRv 有 $v \in W_\tau$，$\mathcal{M}', v \Vdash \phi$。

以下例子展示了认知授权如何在可能世界中参与信念形成。

例 3.1 假设一个图3-1中的模型，$\mathcal{M} = (W = \{w, w_1, w_2\}, R = \{(w, w_1), (w, w_2)\}, V(p) = \{w_1\})$。显然 $\mathcal{M}, w \nVdash \Box p$，因为 wRw_1，$\mathcal{M}, w_2 \nVdash p$。再假设，$p$ 得到理由 t，t 授权认知者只去设想 $W_t = \{w_1\}$ 中的认知状态来思考 p（如图3-1右侧）——对任意 $v \in W_t$ 有 wRv，$\mathcal{M}, v \Vdash p$。

例 3.2 考虑模型 $\mathcal{M} = \{W = \{w, w_1, w_2, w_3, w_4\}, R = \{(w, w_1), (w, w_2), (w, w_3), (w, w_4)\}, V\}$，其中赋值 V 的情况如表3-1所示。由表3-1的命题真值表部分可知，W 已包含思考 p 和 $p \to q$ 的所有可设想的认知状态。$\mathcal{M}$ 中 P 有三个不同的理由，分别授权认知者只设想 $W_{t_1} = \{w_1, w_2\}$、$W_{t_2} = \{w_1\}$ 和 $W_{t_3} = \{w_2\}$ 中的认知状态来思考 p。同理 $\mathcal{M}$ 中 $p \to q$ 有七个不同的授权，分别授权认知者只设想 $W_{t_4} = \{w_1, w_3\ w_4\}$、

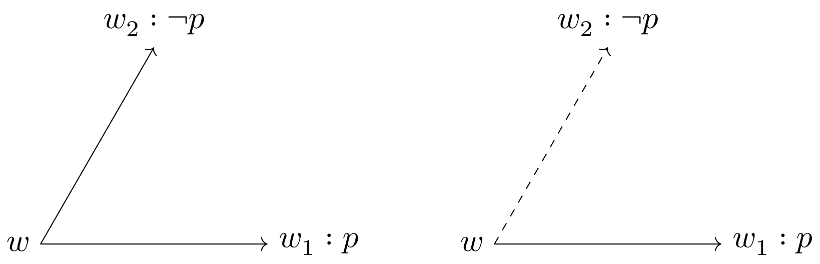

图 3-1　认知授权的机制

$W\backslash\{w\}$	R	p	q	$p \to q$
w_1	(w, w_1)	1	1	1
w_2	(w, w_2)	1	0	0
w_3	(w, w_3)	0	1	1
w_4	(w, w_4)	0	0	1

表 3-1　可设想认知状态的真值表

$W_{t_5} = \{w_1, w_3\}$、$W_{t_6} = \{w_1, w_4\}$、$W_{t_7} = \{w_3, w_4\}$，$W_{t_8} = \{w_1\}$、$W_{t_9} = \{w_3\}$、$W_{t_{10}} = \{w_4\}$ 中的认知状态来思考 $p \to q$。

（三） 认知授权与信念推理

我们对认知授权的知识（信念）推理有更多的条件：

1. 尽管我们认为 $\{s : p, t : \neg p\}$ 是一致的，但同一个好的理由不能授权认知者思考矛盾的认知状态。因此，对一个好的理由 s（理由 s 是好的，当且仅当 s 所授权的且可通达的认知状态集合非空），$\{s : p, s : \neg p\}$ 是不一致的；

2. 理由是可以被组合运用的，如例3.2所示：

   (a) p 的任意理由 t 所授权的 W_t 与 $p \to q$ 的任意理由 t' 所授权的 $W_{t'}$ 的交集只有 $\{w_1\}$ 或 $\emptyset$。因此，对任意 $v \in W_t \cap W_{t'}$ 有 wRv，$\mathcal{M}, v \Vdash q$，

   (b) ϕ（代指 p、q 和 $p \to q$）的任意理由 t 所授权的 W_t 与 W（以及 W 的任意子集）的交集是 W_t 的子集。因此，对任意 $v \in W_t \cap W$ 有 wRv，$\mathcal{M}, v \Vdash \phi$；

3. 认知授权应该是对状态敏感的，同一理由在不同情况下会授权认知者设想不同的认知状态。因此，理由 t 所授权的 W_t 应该随认知者所处的认知状态改变。

为达成上述条件，需要细化认知授权的模型，并借用核证逻辑的资源发展一种刻画认知授权的推理的逻辑。

四、回顾核证逻辑

最早的核证逻辑 LP 由 Artëmov 给出，是证明的逻辑[20]。[1]但核证逻辑并未被广泛应用于认知环境，直至 Fitting 为 LP 提供了正式的可能世界语义——Fitting 模型[8]。引入可能世界语义的主要动机是把核证逻辑与依赖可能世界框架的主流认知逻辑联系起来[22]，从而发展一种（认知）证成的逻辑（the logic of justification）[23]。如今，核证逻辑已经在群体动态认知（group epistemic dynamics）**Sedlar2013-SEDJAA-2**，证成觉知（justification awareness）**10.1093/logcom/exaa043**等领域发挥作用。

（一） 证成的逻辑 J

定义 4.1 (核证项) 核证逻辑 JL 的核证项集合（JTm）由在两个二元算子应用 ·（Application）和加总 $+$（Sum）[2]下来封闭核证变元集合 $JVar = \{x, y, ...\}$ 和核证常元集合 $JCon = \{a, b, ...\}$ 构造而来。形式上，我们用下述规则来构造 JTm(以 BNF-形式[3])：

$$\tau ::= x \mid a \mid \tau \cdot \tau \mid \tau + \tau,$$

其中 $x \in JVar$，$a \in JCon$。

定义 4.2 (公式) 形成核证逻辑 JL 的公式集合（Fm）需要引入命题字母的集合 $Prop = \{p, q, ...\}$。形式上，我们用下述规则来递归构造 Fm（以 BNF-形式）：

$$\phi ::= \bot \mid p \mid \neg\phi \mid \phi \to \phi \mid \tau : \phi,$$

其中，$p \in Prop$，$\tau \in JTm$。$\bot$，即表示任意矛盾的命题常元（falsum）[4]。其他命题连接词定义和使用如常。

定义 4.3 (逻辑 J_0) 证成的逻辑 J_0 的公理系统，包含以下所有公理模式（axiom shemas）的实例和推理规则：

$A0$	经典命题逻辑重言式	
$A1$	$\tau : (\phi \to \psi) \to (\tau' : \phi \to \tau \cdot \tau' : \psi)$	，应用公理的模式；
$A2$	$\tau : \phi \to \tau + \tau' : \phi$ 和 $\vdash \tau : \phi \to \tau' + \tau : \phi$	，附加公理的模式；
$R1$	从 $\vdash \phi$ 和 $\vdash \phi \to \psi$，推得 $\vdash \psi$	，MP-规则。

[1]逻辑研究者认为“证明”仅仅是一种核证，还有其他种类的核证，对公式“$\tau : \phi$”可以有各种不同的解读[21]。

[2]$\cdot$ 的运算力强于 $+$。

[3]全称写作 Backus-Naur Form。

[4]$\bot$ 可以视为 $\neg(\phi \to \phi)$ 的缩写，其中任意 $\phi \in Fm$。

定义 4.4 (常元说明 CS) 核证逻辑 JL 的常元说明（constant specification，简称 CS）是一个满足以下要求的公式集：

1. CS 的元素形如 $c_n : c_{n-1} : \cdots c_1 : \phi$，其中 ϕ 是 JL 的公理，c_i 是核证常元；

2. 如果 $n > 1$ 的 $c_n : c_{n-1} : \cdots c_1 : \phi$ 属于 CS，那么 $c_{n-1} : \cdots c_1 : \phi$ 也属于 CS。

定义 4.5 (常元说明的类型) CS 有如下不同类型：

- 空型：$CS = \emptyset$。认知者无法单独断言任何形如 $\tau : \phi$ 的公式。

- 有限型：CS 是一个有限的公式集。有限型 CS 可以满足 JL 证明的需求，因为任意 JL 的证明序列是有限的，只涉及有限常元及常元说明。

- 公理型：对任意 JL 的公理 ϕ，如果存在常元 c_1 使得 $c_1 : \phi$ 和 $c_n : c_{n-1} : \cdots c_1 : \phi$ 属于 CS，那么 $c_{n+1} : c_n : c_{n-1} : \cdots c_1 : \phi$ 属于 CS。

- 总体型：对任意 JL 的公理 ϕ，任意 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 使得 $c_n : c_{n-1} : \cdots c_1 : \phi$ 属于 CS。（如果一个 CS 满足总体型要求，那么它也满足公理型要求。）

定义 4.6 (带常元说明的核证逻辑 J_{CS}) $\mathsf{J}_{CS} = \mathsf{J}_0 + CS$。空型常元说明的核证逻辑记作 $\mathsf{J}_\emptyset$，$\mathsf{J}_\emptyset$ 与 J_0 相同。总体型常元说明的核证逻辑记作 J_{TCS}。

定理 4.1 (内化定理) 对任意公理型 CS，J_{CS} 享有内化定理，

$$\text{如果} \vdash \phi\text{，那么对一些核证项}\tau\text{，} \vdash \tau : \phi\text{。}$$

证明 内化定理可以由 ϕ 的证明长度归纳得到。假设 ϕ 是公理或属于 CS，根据公理型 CS 的要求，存在常元 c 使得 $c : \phi$ 属于 CS。假设 ϕ 由 $\psi \to \phi$ 和 ψ 通过 MP-规则得到。则根据归纳假设，$\vdash \tau : \psi \to \phi$，$\vdash \tau' : \psi$。根据应用公理和 MP-规则，得到 $\vdash \tau \cdot \tau' : \phi$。 □

定义 4.7 (证成的逻辑 J) $\mathsf{J} = \mathsf{J}_0 +$ 公理内化规则。内化规则（internalization rule），

$$\text{从} \vdash \phi\text{，推得对任意常元} c_1, c_2, \ldots, c_n\text{，} \vdash c_n : c_{n-1} : \cdots c_1 : \phi\text{。}$$

J 与 J_{TCS} 相同。

（二） Fitting 模型

定义 4.8 (证据函数 $\mathcal{E}$) 证据函数 $\mathcal{E}: JTm \times Fm \mapsto 2^W$，将一个核证项与公式映射到一组可能世界上。$w \in \mathcal{E}(\tau, \phi)$ 读作“τ 证成 ϕ，在 w 上”。

定义 4.9 (Fitting 模型) Fitting 模型 $\mathcal{M} = (W, R, \mathcal{E}, V)$，其中 (W, R, V) 与定义2.1相同。证据函数 $\mathcal{E}$ 在定义4.8中给出。

定义 4.10 (真值条件) 我们用 $\mathcal{M}\ w \Vdash \phi$ 表示核证公式 ϕ 在可能世界 $w \in W$ 中为真，其真值条件第 1–3 项与定义2.2相同，第 4 项换为

$4''$. $\mathcal{M}\ w \Vdash \tau : \phi$ 当且仅当 模态条件：$\mathcal{M}, v \Vdash \phi$ 对任意wRv，有$v \in W$，且
证据条件：$w \in \mathcal{E}(\tau, \phi)$。

定义 4.11 (最小证据条件) Fitting 模型中，证据函数至少满足如下要求：

$$\text{应用条件} \quad \mathcal{E}(\tau, \phi \to \psi) \cap \mathcal{E}(\tau', \phi) \subseteq \mathcal{E}(\tau \cdot \tau', \psi);$$
$$\text{附加条件} \quad \mathcal{E}(\tau, \phi) \cup \mathcal{E}(\tau', \phi) \subseteq \mathcal{E}(\tau + \tau', \phi)。$$

定义 4.12 (常元说明条件) 我们称一个 Fitting 模型是满足常元说明 CS 的，当对每个 $c : \phi \in CS$，$\mathcal{E}(c, \phi) = W$。

（三） 基本模型

定义 4.13 (基本模型) 一个基本模型 $*$，由对命题字母和核证项的解释组成。基本模型对命题字母的解释是真值，

$$* : Prop \mapsto \{1, 0\}。$$

基本模型对核证项的解释是一些公式的集合，

$$* : JTm \mapsto 2^{Fm}。$$

对任意核证项 τ，τ^* 是 τ 的解释 $*(\tau)$ 的简写。

定义 4.14 (基本模型中的赋值) 基本模型对公式的赋值是真值，$* : Fm \mapsto \{1, 0\}$。，条件如下（ϕ^* 是 ϕ 的赋值 $*(\phi)$ 的简写）：

1. 对 $p \in Prop$，$p^* = *(p)$ （，$\bot^* = 0$）；
2. $\neg\phi = 1$ 当且仅当 $\phi^* = 0$；
3. $(\phi \to \psi)^* = 1$ 当且仅当 $\phi^* = 0$ 或 $\psi^* = 1$；

4. $(\tau : \phi)^* = 1$ 当且仅当 $\phi \in \tau^*$。

定义 4.15 (J_0 模型条件)　基本模型是 J_0，当满足下述条件，

$$\tau^* \rhd \tau'^* \subseteq (\tau \cdot \tau')^* \text{ 且} \tau^* \cup \tau'^* \subseteq (\tau + \tau')^* 。$$

其中，对公式集 Γ 和 Δ，形如 $\Gamma \rhd \Delta$ 的集合定义为

$$\Gamma \rhd \Delta = \{\psi \mid \phi \to \psi \in \Gamma \text{ 且对一些} \phi \text{，} \phi \in \Gamma 。$$

定义 4.16 (常元条件)　一个基本模型满足 CS 中的任意公式，那么它是 CS-基本模型。

五、授权的逻辑

（一） 授权的逻辑 J$_{Ent}$

定义 5.1 (逻辑 J$_{Ent}$) J$_{Ent}$ = J$_0$ + 重复授权公理 + 强附加公理 + 授权交换公理 + N′-规则。认知授权的逻辑 J$_{Ent}$ 的公理系统包含以下所有公理模式的实例和推理规则：

$A0$ 经典命题逻辑重言式		
$A1$	$\tau:(\phi\to\psi)\to(\tau':\phi\to\tau\cdot\tau':\psi)$	，应用公理的模式；
$A2$	$\tau:\phi\to\tau+\tau':\phi$ 和 $\tau:\phi\to\tau'+\tau:\phi$	，附加公理的模式；
$A3$	$\tau\cdot...\cdot\tau:\phi\to\tau:\phi$	，重复授权公理的模式；
$A4$	$\tau:\phi\to\tau\cdot\tau':\phi$	，强附加公理的模式；
$A5$	$\tau\cdot\tau':\phi\leftrightarrow\tau'\cdot\tau:\phi$	，授权交换公理的模式。
$R1$	从 $\vdash\phi$ 和 $\vdash\phi\to\psi$，推得 $\vdash\psi$	MP-规则；
$R2$	从 $\vdash\phi$，推得对任意 $\tau\in JTm$，$\vdash\tau:\phi$	N′-规则。

其中重复授权公理的模式中核证项 $\tau\cdot...\cdot\tau$ 由同一个 $\tau\in JTm$ 有限多次运用 $\cdot$ 构成。

定理 5.1 (强内化定理) J$_{Ent}$ 享有强内化定理，

$$\text{如果}\vdash\phi\text{，那么对一些核证项}\tau\text{，}\vdash\tau:\phi\text{。}$$

其中 τ 仅由核证常元和应用算子 $\cdot$ 构成。

证明 强内化定理可以由 ϕ 的证明长度归纳得到。假设 ϕ 是公理，根据 N′-规则，任意常元 c 使得 $\vdash c:\phi$。假设 ϕ 由 $\psi\to\phi$ 和 ψ 通过 MP-规则得到。则根据归纳假设，$\vdash\tau:\psi\to\phi$，$\vdash\tau':\psi$，其中 τ 和 τ' 仅由核证常元和应用算子 $\cdot$ 构成。根据应用公理和 MP-规则，得到 $\vdash\tau\cdot\tau':\phi$，其中 $\vdash\tau\cdot\tau'$ 仅由核证常元和应用算子 $\cdot$ 构成。 □

定理 5.2 (J$_{Ent}$ 满足总体型 CS) 如果 ϕ 是 J$_{Ent}$ 的公理，那么对任意 $c_1,c_2,...,c_n$ 使得 $\vdash c_n:c_{n-1}:\cdots c_1:\phi$。

证明 如果 ϕ 是 J$_{Ent}$ 的公理，那么

1.	$\vdash\phi$	公理
2.	$\vdash c_1:\phi$	N′-规则, 1.
	$\vdots$	
n.	$\vdash c_{n-1}:\cdots c_1:\phi$	N′-规则, $n-1$.
$n+1$.	$\vdash c_n:c_{n-1}:\cdots c_1:\phi$	N′-规则, n.

其中 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 为任意核证常元。 □

（二） 授权的模型

定义 5.2 (授权函数 Ent) 证据函数 $Ent : JTm \times W \mapsto 2^W$，将特定认知状态上一个核证项解释到 W 的一个子集上。$Ent(\tau, w) = W_{(\tau,w)}$，其中 $W_{(\tau,w)} \subseteq W$，读作"$W_{(\tau,w)}$ 是 τ 在 w 上所授权的认知状态的集合"。

定义 5.3 (授权模型) 授权的模型 $\mathcal{M} = (W, R, Ent, V)$，其中 (W, R, V) 与定义2.1相同。授权函数 Ent 在定义5.2中给出。

定义 5.4 (真值条件) 我们用 $\mathcal{M}\ w \Vdash \phi$ 表示授权公式 ϕ 在可能世界 $w \in W$ 中为真，其真值条件第 1–3 项与定义2.2相同，第 4 项换为

4*. $\mathcal{M}\ w \Vdash \tau : \phi$ 当且仅当对任意 wRv 有 $v \in Ent(\tau, w)$，$\mathcal{M}, v \Vdash \phi$。

定义 5.5 (最小授权条件) 授权模型中，授权函数至少满足如下要求：

应用条件	$Ent(\tau \cdot \tau', w) = Ent(\tau' \cdot \tau, w)$ 且,
	$Ent(\tau \cdot \tau', w), Ent(\tau' \cdot \tau, w) \subseteq Ent(\tau, w) \cap Ent(\tau', w)$；
重复授权条件	$Ent(\tau \cdot \dots \cdot \tau, w) = Ent(\tau, w)$；
附加条件	$Ent(\tau + \tau', w), Ent(\tau' + \tau, w) \subseteq Ent(\tau, w) \cap Ent(\tau', w)$。

定义 5.6 (常元解释条件) 对任意 $c \in JCon$，任意 $w \in W$，$Ent(c, w) = W$。

（三） 可靠性和完全性

定理 5.3 (逻辑 J_{Ent} 的可靠性) 如果 $\vdash \phi$ 那么 ϕ 在 $\mathcal{M}$ 中有效（valid），即对任意 $w \in W$ 有 $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$。

证明 逻辑 J_{Ent} 的可靠性（soundness）可以通过对 ϕ 的证明的长度归纳得到。所有重言式的有效性易证。MP-规则的保有效性易证。接下来验证应用公理的模式、附加公理的模式的有效性、重复授权公理模式的有效性和 N′-规则的保有效性。

考虑应用公理的模式 $\tau : (\phi \to \psi) \to (\tau' : \phi \to \tau \cdot \tau' : \psi)$。设定 w 为 W 中任意可能世界，假设 $\mathcal{M}, w \Vdash \tau : (\phi \to \psi)$ 且 $\mathcal{M}, w \Vdash \tau' : \phi$。我们需要说明 $\mathcal{M}, w \Vdash \tau \cdot \tau' : \psi$。根据定义5.4，对任意 wRv 有 $v \in Ent(\tau, w)$，$\mathcal{M}, v \Vdash \phi \to \psi$；同理，对任意 wRv 有 $v \in Ent(\tau', w)$，$\mathcal{M}, v \Vdash \phi$。根据定义5.5中应用条件，$Ent(\tau \cdot \tau', w) \subseteq Ent(\tau, w)$ 且 $Ent(\tau \cdot \tau', w) \subseteq Ent(\tau', w)$。因此，对任意 wRv 有 $v \in Ent(\tau \cdot \tau', w)$，$\mathcal{M}, v \Vdash \phi \to \psi$ 且 $\mathcal{M}, v \Vdash \phi$。所以，对任意 wRv 有 $v \in Ent(\tau \cdot \tau', w)$，$\mathcal{M}, v \Vdash \psi$。根据定义5.4，$\mathcal{M}, w \Vdash \tau \cdot \tau' : \psi$。

附加公理的模式 $\tau : \phi \to \tau + \tau' : \phi$ 和 $\tau : \phi \to \tau' + \tau : \phi$ 的有效性可以用相似的方式得出。

考虑重复授权公理的模式 $\tau \cdot ... \cdot \tau : \phi \to \tau : \phi$，其中核证项 $\tau \cdot ... \cdot \tau$ 由同一个 $\tau \in JTm$ 有限多次运用 $\cdot$ 构成。设定 w 为 W 中任意可能世界，假设 $\mathcal{M}, w \Vdash \tau \cdot ... \cdot \tau : \phi$。我们需要说明 $\mathcal{M}, w \Vdash \tau : \phi$。根据定义5.4，对任意 wRv 有 $v \in Ent(\tau \cdot ... \cdot \tau, w)$，$\mathcal{M}, v \Vdash \phi$。根据定义5.5中重复授权条件，$Ent(\tau \cdot ... \cdot \tau, w) = Ent(\tau, w)$。所以，对任意 wRv 有 $v \in Ent(\tau, w)$，$\mathcal{M}, v \Vdash \phi$。根据定义5.4，我们得到 $\mathcal{M}, w \Vdash \tau : \phi$。

强附加公理的模式 $\tau : \phi \to \tau \cdot \tau' : \phi$ 和授权交换公理的模式 $\tau \cdot \tau' : \phi \leftrightarrow \tau' \cdot \tau : \phi$ 的有效性可以用相似的方式得出。

最后检验 N′-规则的保有效性。假设 ϕ 是有效的，即对任意 $w \in W$，有 $\mathcal{M}, w \vdash \phi$。所以对任意 $\tau \in JTm$，任意 wRv，有 $v \in Ent(\tau, w)$ $\mathcal{M}, v \Vdash \phi$。因此，根据定义5.4，对任意 $\tau \in JTm$，任意 $w \in W$，$\mathcal{M}, w \vdash \tau : \phi$。 □

定义 5.7 (J_{Ent} 中可证) 逻辑 J_{Ent} 中，公式 ϕ 可从公式集 Ψ 中证明（即，$\Psi \vdash_{\mathsf{J}_{Ent}} \phi$），当且仅当对一些 $\psi_1, ..., \psi_n \in \Psi$，$\vdash_{\mathsf{J}_{Ent}} (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \phi$。

定义 5.8 (J_{Ent} 的一致性) 公式集 Φ 是 J_{Ent}-不一致的（inconsistent）当且仅当 $\Phi \vdash \bot$。Φ 是 J_{Ent}-一致的（consistent）当且仅当 Φ 不是 J_{Ent}-不一致的。（根据 Lindenbaum 定理，任何一致的公式集 Φ 可以被扩张成一个极大一致集 Γ，使得对任意 γ，一定有 $\gamma \in \Gamma$ 或 $\neg\gamma \in \Gamma$ 之一。）

定义 5.9 ($\sharp$-算子) 对逻辑 J_{Ent} 的公式集 Φ，$(\tau, \Phi)^\sharp = \{\phi \mid \tau : \phi \in \Phi\}$。

定义 5.10 (典范授权模型) 典范（canonical）证成模型 $\mathcal{M}_c = (W, R, Ent, V)$ 定义如下：

1. W 是所有极大 J_{Ent}-一致的公式集的集合；

2. 如果 $(\tau, \Gamma)^\sharp \subseteq \Delta$，则 $\Delta \in Ent(\tau, \Gamma)$；

3. 对 $\Gamma \in W$，$\Delta \in Ent(\tau, \Gamma)$，如果 $(\tau, \Gamma)^\sharp \subseteq \Delta$，则 $\Gamma R \Delta$；

4. 对 $p \in Prop$，如果 $p \in \Gamma$，则 $\Gamma \in V(p)$。

引理 5.1 定义5.10中 2. 满足定义5.5中的最小授权条件。

证明 首先验证如果 $(\tau,\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则 $\Delta\in Ent(\tau,\Gamma)$ 满足应用条件 $Ent(\tau\cdot\tau',w)=Ent(\tau,w)\cap Ent(\tau',w)$。假设：如果 $(\tau,\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则 $\Delta\in Ent(\tau,\Gamma)$；如果 $(\tau',\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则 $\Delta\in Ent(\tau',\Gamma)$。那么，如果 $(\tau,\Gamma)^\sharp\cap(\tau',\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则 $\Delta\in Ent(\tau,\Gamma)\cap Ent(\tau,\Gamma)$。

根据应用条件，$Ent(\tau\cdot\tau',w)=Ent(\tau'\cdot\tau,w)$ 且 $Ent(\tau\cdot\tau',w)\subseteq Ent(\tau,w)\cap Ent(\tau',w)$。所以只需验证：如果 $(\tau,\Gamma)^\sharp\cap(\tau',\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则 $\Delta\in Ent(\tau\cdot\tau',\Gamma)$。即，$\{\Delta\mid(\tau,\Gamma)^\sharp\cap(\tau',\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta\}\subseteq Ent(\tau\cdot\tau',\Gamma)$。根据定义5.10中 2. 得到，如果 $(\tau\cdot\tau',\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则 $\Delta\in Ent(\tau\cdot\tau',\Gamma)$ 即，$\{\Delta\mid(\tau\cdot\tau',\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta\}\subseteq Ent(\tau\cdot\tau',\Gamma)$。所以只需验证 $\{\Delta\mid(\tau,\Gamma)^\sharp\cap(\tau',\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta\}\subseteq\{\Delta\mid(\tau\cdot\tau',\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta\}$。

假设任意 $\Delta\in\{\Delta\mid(\tau,\Gamma)^\sharp\cap(\tau',\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta\}$，则对任意 $\phi\in(\tau,\Gamma)^\sharp\cap(\tau',\Gamma)^\sharp$ 且 $\phi\in\Delta$ 有 $\tau:\phi,\tau':\phi\in\Gamma$。因为强附加公理模式 $\tau:\phi\rightarrow\tau\cdot\tau':\phi$ 和授权交换公理模式 $\vdash\tau\cdot\tau':\phi\leftrightarrow\tau'\cdot\tau:\phi$，所以根据 Γ 的极大一致性，$\tau\cdot\tau':\phi,\tau'\cdot\tau:\phi\in\Gamma$。又因为 $\phi\in\Delta$，所以 $(\tau\cdot\tau',\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$。因此，$\Delta\in\{\Delta\mid(\tau\cdot\tau',\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta\}$。

验证定义 5.3.5 中 2. 满足定义 5.2.4 中的重复授权条件。即，如果 $(\tau,\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则 $\Delta\in Ent(\tau\cdot...\cdot\tau,\Gamma)$；如果 $(\tau\cdot...\cdot\tau,\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则 $\Delta\in Ent(\tau,\Gamma)$。对任意 $\phi\in(\tau,\Gamma)^\sharp$，有 $\phi\in\Delta$ 且 $\tau:\phi\in\Gamma$。因为强附加公理 $\tau:\phi\rightarrow\tau\cdot\tau':\phi$，所以 $\tau\cdot\tau:\phi\in\Gamma$。经过有限多次反复运用强附加公理，$\tau\cdot...\cdot\tau:\phi\in\Gamma$。因为有 $\phi\in\Delta$，所以 $(\tau\cdot...\cdot\tau,\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则 $\Delta\in Ent(\tau\cdot...\cdot\tau,\Gamma)$。如果 $(\tau\cdot...\cdot\tau,\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则对任意 $\phi\in(\tau\cdot...\cdot\tau,\Gamma)^\sharp$，有 $\phi\in\Delta$ 且 $\tau\cdot...\cdot\tau:\phi\in\Gamma$。因为重复授权公理 $\tau\cdot...\cdot\tau:\phi\rightarrow\tau:\phi$，所以 $\tau:\phi\in\Gamma$。因为有 $\phi\in\Delta$，所以 $(\tau,\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则 $\Delta\in Ent(\tau,\Gamma)$。

$(\tau,\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$，则 $\Delta\in Ent(\tau,\Gamma)$ 满足附加条件 $Ent(\tau+\tau',w),Ent(\tau'+\tau,w)\subseteq Ent(\tau,w)\cap Ent(\tau',w)$ 的验证可以相似地进行。 □

引理 5.2 (存在引理) 如果 Γ 包含形如 $\neg\tau:\phi$ 的公式的极大 J_{Ent} 一致集，那么存在一个极大 J_{Ent} 一致集 Δ，使得 $(\tau,\Gamma)^\sharp\subseteq\Delta$ 且 $\neg\phi\in\Delta$。

证明 假设 $\neg\tau:\phi\in\Gamma$。显然 $(\tau,\Gamma)^\sharp\subseteq(\tau,\Gamma)^\sharp\cup\{\neg\phi\}$，我们需要说明 $(\tau,\Gamma)^\sharp\cup\{\neg\phi\}$ 是一致的。否则，存在有限集 $\{\psi_1,...\psi_n\}\subseteq(\tau,\Gamma)^\sharp$ 使得 $\vdash(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\wedge\neg\phi)\rightarrow\bot$。根据经典逻辑，$\vdash(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\wedge\neg\phi)\rightarrow\bot$ 当且仅当 $\vdash(\psi_1\rightarrow(...\rightarrow(\psi_n\rightarrow(\neg\phi\rightarrow\bot))...))$

当且仅当 $\vdash (\psi_1 \to (... \to (\psi_n \to \phi) ...))$。

1.	$\vdash (\psi_1 \to (... \to (\psi_n \to \phi) ...))$	假设
2.	$\vdash \tau_0 : (\psi_1 \to (... \to (\psi_n \to \phi) ...))$	N′-规则, 1.
3.	$\vdash \tau_1 : \psi_1 \to \tau_0 \cdot \tau_1 : (... \to (\psi_n \to \phi) ...)$	MP-规则, 应用公理, 2.
	$\vdots$	
$n+2$.	$\vdash \tau_1 : \psi_1 \to ... \to (\tau_n : \psi_n \to \tau_0 \cdot ... \cdot \tau_n : \phi)$	经典逻辑, $n.$, $n+1$.
$n+3$.	$\vdash (\tau_1 : \psi_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n : \psi_n) \to \tau_0 \cdot ... \cdot \tau_n : \phi$	经典逻辑, $n+3$.

因为存在有限集 $\{\psi_1, ... \psi_n\} \subseteq (\tau, \Gamma)^\sharp$，所以 $\tau : \psi_1, ..., \tau : \psi_n \in \Gamma$。根据定义5.7，$\Gamma \vdash \tau \cdot ... \cdot \tau : \phi$。根据重复授权公理模式 $\tau \cdot ... \cdot \tau : \phi \to \tau : \phi$，$\Gamma \vdash \tau : \phi$。又因 Γ 的极大一致性，$\tau : \phi \in \Gamma$，与假设 $\neg\tau : \phi \in \Gamma$ 矛盾。因此假设 $\vdash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \neg\phi) \to \bot$ 错误，$(\tau, \Gamma)^\sharp \cup \{\neg\phi\}$ 是一致的。根据 Lindenbaum 定理，$(\tau, \Gamma)^\sharp \cup \{\neg\phi\}$ 可以被扩展为极大一致集 Δ，使得 $(\tau, \Gamma)^\sharp \subseteq \Delta$ 且 $\neg\phi \in \Delta$。 □

引理 5.3 (真值引理) 对任意 $\Gamma \in W$，任意公式 ϕ，$\phi \in \Gamma$ 当且仅当 $\mathcal{M}_c, \Gamma \Vdash \phi$。

证明 真值引理通过归纳 ϕ 的复杂度完成。

1. 对 $\phi \in Prop$，真值条件根据定义5.10成立。
2. 对 $\neg\phi \in \Gamma$，当且仅当，因为 Γ 是极大一致的，有 $\phi \notin \Gamma$；当且仅当，根据归纳假设，$\mathcal{M}, \Gamma \nVdash \phi$；当且仅当，根据定义5.4，$\mathcal{M}_c, \Gamma \Vdash \neg\phi$。
3. 对 $\phi \to \psi \in \Gamma$，当且仅当，因为 Γ 是极大一致的，有 $\phi \notin \Gamma$ 或 $\psi \in \Gamma$；当且仅当，根据归纳假设，$\mathcal{M}_c, \Gamma \nVdash \phi$ 或 $\mathcal{M}_c, \Gamma \Vdash \psi$；当且仅当，根据定义5.4，$\mathcal{M}_c, \Gamma \Vdash \phi \to \psi$。
4. (a) 假设 $\tau : \phi \in \Gamma$。根据定义5.10，对任意 $\Gamma R \Delta$ 有 $\Delta \in Ent(\tau, \Gamma)$，满足 $(\tau, \Gamma)^\sharp \subseteq \Delta$。又因为 $\phi \in (\tau, \Gamma)^\sharp$，有 $\phi \in \Delta$。根据归纳假设，$\mathcal{M}_c, \Delta \Vdash \phi$。因此，根据定义5.4，$\mathcal{M}_c, \Gamma \Vdash \tau : \phi$。

   (b) 假设 $\tau : \phi \notin \Gamma$，根据极大一致性，$\neg\tau : \phi \in \Gamma$。根据引理5.2极大一致集 Δ，使得 $(\tau, \Gamma)^\sharp \subseteq \Delta$ 且 $\neg\phi \in \Delta$。因为 $\Delta \in Ent(\tau, \Gamma)$，有 $(\tau, \Gamma)^\sharp \subseteq \Delta$，所以 $\Gamma R \Delta$。因此，$\neg\phi \in \Delta$，$\phi \notin \Delta$，根据归纳假设 $\mathcal{M}_c, \Delta \nVdash \phi$。根据定义5.4，我们得到 $\mathcal{M}_c, \Gamma \nVdash \tau \to \phi$。

□

推论 5.1 (完全性) 如果公式 ϕ 在 J_{Ent} 的 $\mathcal{M}_c$ 中是有效的，那么 $\vdash_{\mathsf{J}_{Ent}} \phi$。

证明 通过引理5.3易证：公式 ϕ 在 J_{Ent} 的 $\mathcal{M}_c$ 中是有效的，当且仅当 $\vdash_{\mathsf{J}_{Ent}} \phi$。 □

六、余论

本文中，已经建立了可靠且完全的授权的逻辑 J$_{Ent}$，希望以此为基础，我们可以扩展出更多认知授权的逻辑。以下介绍基于认知授权实现信念授权逻辑 J$_{Ent}$D4 和知识授权逻辑 J$_{Ent}$T4 的思路。逻辑 J$_{Ent}$T4 和 J$_{Ent}$T4 的完全性留作未来的工作。

（一） 信念授权逻辑 J$_{Ent}$D4

在章节三中提及，对一个好的理由 s，公式集 $\{s : p, s : \neg p\}$ 是不一致的。但 J$_{Ent}$ 会允许一些坏的理由出现，使得 $s : p \to \neg s : \neg p$ 不是有效式。$\mathcal{M}, w \Vdash s : p \wedge s : \neg p$ 时，不存在 v 使得 wRv 有 $v \in Ent(s, w)$。

为了使 D-公理模式 $K\phi \to \neg K\neg\phi$ 的授权逻辑对应[1]——J$_{Ent}$D4 的公理模式 $\tau : \phi \to \neg\tau : \neg\phi$ 有效，J$_{Ent}$D4 的模型 $\mathcal{M} = (W, R, Ent, V)$ 满足如下条件：

1. R 包含 W 上序（serial）关系[2]；

2. 授权函数 Ent 满足授权非空条件。

定义授权非空条件首先需要定义集合 R_w：

定义 6.1 (R_w) $R_w = \{v \mid wRv\}$，R_w 是 w 所有可通达的世界的集合。

定义 6.2 (授权非空条件) Ent 满足授权非空条件当且仅当对任意 $w \in W$，$\tau \in JTm$，$\tau' \in JTm$，$Ent(\tau, w) \cap R_w \neq \emptyset$ 且 $Ent(\tau, w) \cap Ent(\tau', w) \neq \emptyset$。

在逻辑 J$_{Ent}$D4 中，我们需要引入新的一元核证算子检验 !（checker）。[3]为了使 4-公理模式 $K\phi \to KK\phi$ 的授权逻辑对应——J$_{Ent}$D4 的公理模式 $\tau : \phi \to !\tau : \tau : \phi$ 有效，J$_{Ent}$D4 的模型 $M = (W, R, Ent, V)$ 满足如下条件：

1. R 包含 W 上传递关系[4]；

2. 授权函数 Ent 满足单调（*monotonicity*）条件。

定义 6.3 (单调条件) 如果 wRv，那么 $Ent(\tau, v) \subseteq Ent(\tau, w)$。

证明 验证公理模式 $\tau : \phi \to !\tau : \tau : \phi$ 的有效性。设定任意 $w \in W$，$\mathcal{M}, w \Vdash \tau : \phi$ 且 $\mathcal{M}, w \Vdash \neg !\tau : \tau : \phi$。所以存在 wRv 有 $v \in Ent(!\tau, w)$，$\mathcal{M}, v \Vdash \neg\tau : \phi$。所以存在 vRu

---

[1]在核证逻辑 JD 中，公理模式 $\tau : \bot \to \bot$ 对应 D-公理模式。

[2]序关系：对所有 $w \in W$ 有一些 $v \in W$ 使得 wRv。

[3]检验 ! 最早被 Artëmov 在证明的逻辑 LP 中引入[20]。

[4]传递关系：对所有 $w \in W$，所有 $v \in W$，所有 $u \in W$，如果 wRv 且 vRu，那么 wRu。

有 $u \in Ent(\tau, v)$，$\mathcal{M}, u \Vdash \neg\phi$。根据 R 的传递性，wRu。根据单调条件，$u \in Ent(\tau, w)$。因此，存在 wRu 有 $u \in Ent(\tau, w)$，$\mathcal{M}, w \Vdash \neg\tau : \phi$，矛盾。

$\square$

（二） 知识授权逻辑 J_{Ent}T4

知识授权逻辑 J_{Ent}T4 包含公理模式 $\tau : \phi \to \phi$ 和 $\tau : \phi \to !\tau : \tau : \phi$。使后者有效的条件已在章节一中给出。公理模式 $\tau : \phi \to \phi$ 是 T-公理在 J_{Ent}T4 中的对应，可以保证知识授权的事实性（和一致性）。

为使公理模式 $\tau : \phi \to \phi$，J_{Ent}T4 的模型 $M = (W, R, Ent, V)$ 满足如下条件：

1. R 包含 W 上自反关系[1]；

2. 授权函数 Ent 满足事实性条件。

定义 6.4 (事实性条件) 对任意 $\tau \in JTm$（$!\tau \in JTm$），$w \in Ent(\tau, w)$。

认知授权逻辑进一步拉近了认知逻辑与现代知识论间的距离，期待认知授权逻辑得到进一步拓展和更广泛的应用。

[1]自反关系：对所有 $w \in W$，wRw。

参考文献

[1] LEVY N. Bad Beliefs: Why They Happen to Good People[M]. Oxford University Press, 2021.

[2] BORGONI C, KINDERMANN D, ONOFRI A. The Fragmented Mind[M]. Oxford: Oxford University Press, 2021.

[3] YALCIN S. Epistemic Modals[J]. Mind, 2007, 116(464): 983-1026. DOI: 10.1093/mind/fzm983.

[4] KYBURG H E. Probability and the Logic of Rational Belief[M]. Middletown, CT, USA: Wesleyan University Press, 1961.

[5] MKRTYCHEV A. Models for the logic of proofs[C]. in: ADIAN S, NERODE A. Logical Foundations of Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997: 266-275.

[6] ARTËMOV S N. Justification Logic: Reasoning with Reasons[M]. Ed. by FITTING M. New York, NY: Cambridge University Press, 2019.

[7] ARTËMOV S N. The Ontology of Justifications in the Logical Setting[J]. Studia Logica, 2012, 100(1-2): 17-30.

[8] FITTING M. The Logic of Proofs, Semantically[J]. Annals of Pure and Applied Logic, 2005, 132(1): 1-25.

[9] HINTIKKA J, COHEN R S, DAVIDSON D, et al. Partial Belief[M]. in: VICKERS J M. Belief and Probability. Dordrecht: Springer Netherlands, 1976: 39-60.

[10] BERTO F. Impossible Worlds[J]. Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2013(2013): en ligne.

[11] BERTO F, JAGO M. Impossible Worlds[M]. Ed. by JAGO M. Oxford: Oxford University Press, 2019.

[12] ARTËMOV S. The Logic of Justification[J]. Review of Symbolic Logic, 2008, 1(4): 477-513.

[13] WRIGHT C. Warrant for Nothing (and Foundations for Free)?[J]. Aristotelian Society Supplementary Volume, 2004, 78(1): 167-212. DOI: 10.1111/j.0309-7013.2004.00121.x.

[14] Von WRIGHT G H. An Essay in Modal Logic[M]. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1951.

[15] HINTIKKA J. Knowledge and Belief[M]. Ithaca, N.Y., Cornell University Press, 1962.

[16] FAGIN R, HALPERN J Y, MOSES Y, et al. Reasoning About Knowledge[M]. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2003.

[17] WANG R J. Timed modal epistemic logic[D]. USA: City University of New York, 2012.

[18] GRAHAM P, PEDERSEN N J L L. Epistemic Entitlement[M]. Oxford, UK: Oxford University Press, 2020.

[19] STALNAKER R. A Theory of Conditionals[G]. in: RESCHER N. Studies in Logical Theory (American Philosophical Quarterly Monographs 2). Blackwell, 1968: 98-112.

[20] ARTËMOV S. Logic of Proofs[J]. Annals of Pure and Applied Logic, 1994, 67(1-3): 29-59.

[21] 李巍. 对核证逻辑的研究[D]. 南开大学, 2015.

[22] ARTËMOV S, NOGINA E. On epistemic logic with justification[C]. in: 2005: 279-294.

[23] ARTEMOV S. The Logic of Justification[J]. Review of Symbolic Logic, 2008, 1(4): 477-513.

致谢

本文是我的本科学位论文，自 2023 年晚秋开始筹备，2024 年春末得以成稿，希望它能证明我本科四年没有蹉跎光阴。

首先感谢魏宇老师，他先后指导了我的学年论文与学位论文写作。魏老师“写论文不要金玉其外”、“不要‘以其昏昏，使人昭昭’”、“年轻学生容易眼高手低”的训诫已谨记于心。感谢老师不弃我愚钝松弛，一直予以耐心包容与悉心指导。

感谢郁振华老师、应奇老师、惠春寿老师、徐竹老师。在他们的课堂上我总会想起要提高哲学品味。

感谢 Andrew McCarthy 老师。在他的课堂上我第一次学会了模态逻辑的元定理证明。还要感谢他一直能包容我糟糕的英语。

感谢史德凡老师（Shawn Standerfer）。他提醒了我，我的逻辑其实是一个正规模态系统。

感谢 Melvin Fitting。他亲自为我澄清了一些 Fitting 模型的历史发展，并且指出了我的系统完全性证明时可能遇到的困难。

感谢程华清老师。他一直鼓励我进行逻辑学习，并且指出了我将 $\vdash$ 写入公理模式的错误。程老师对我的论文还提出了很多建议，遗憾我没有足够时间落实。

感谢陆晨浩学长。他向我介绍了认知授权的概念，并成功劝阻我将标题定为背书的逻辑（the logic of endorsement）。

感谢杜俊杰、刘方舟、王雨萌、庄子妍等同学。她们与我交流了很多关于认知证成、认知授权的哲学直觉。

感谢周正、曾千里、周佳楠等同学。他们在论文的不同阶段为我提供了很多建议与想法。

感谢我的猫猫们。它们在我焦虑写作的日子里为我提供了情绪价值。

感谢我的家人一直对我包容与支持。